

Научная статья

УДК 630.182.51+630.228.6+630.521.2+630.17+582.795(470.57)

DOI: 10.37482/0536-1036-2026-4-20-34

Распределение диаметров деревьев разновозрастных древостоев липы мелколистной

А.К. Габделхаков[✉], канд. с.-х. наук, доц.; ResearcherID: [G-3023-2018](#),

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7129-880X>

И.И. Фазлутдинов², вед. специалист; ResearcherID: [C-9581-2019](#),

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0327-3752>

В.Ф. Коновалов¹, д-р с.-х. наук, проф.; ResearcherID: [G-2775-2018](#),

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2020-5540>

М.В. Мартынова¹, д-р с.-х. наук, доц.; ResearcherID: [G-4659-2018](#),

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8804-8425>

С.И. Гарфутдинова³, заведующий сектором; ResearcherID: [PGA-3926-2026](#),

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4132-9410>

¹Башкирский государственный аграрный университет, г. Уфа, Россия;

aliya201199@mail.ru[✉], vfkonovalov@bk.ru, maaarussia@mail.ru

²Министерство лесного хозяйства Республики Башкортостан, г. Уфа, Россия;

solnc2007@yandex.ru

³Министерство земельных и имущественных отношений Республики Башкортостан,

г. Уфа, Россия; sabrina.shatskaya@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.04.25 / Одобрена после рецензирования 23.06.25 / Принята к печати 26.06.25

Аннотация. Оценка количественных характеристик лесного насаждения является исходным требованием стратегий планирования использования насаждения и лесоводственных мероприятий в нем. В число таких характеристик входит структурное разнообразие, которое может устанавливаться путем моделирования плотности вероятности распределения диаметров деревьев на высоте 1,3 м. Целью настоящего исследования стало описание структуры древостоя и подбор наиболее подходящей модели конечной смеси эмпирического распределения деревьев по диаметрам естественных разновозрастных древостоев липы мелколистной (*Tilia cordata* Mill.) центрально-восточной части Республики Башкортостан. Выполнен иерархический кластерный анализ полученных на 19 пробных площадях показателей деревьев методом Уорда и установлена пригодность методов 2-компонентных конечных смесей, основанных на гамма-распределении, распределении Вейбулла, логнормальном и скошено-нормальном распределениях. Для подгонки моделей конечных смесей к данным о диаметре использовали алгоритм максимизации ожидания, реализованный в пакете ForestFit, разработанный для среды R. Все исследованные древостои отнесены к унимодальному типу, кривые структуры распределений по диаметру характеризовались скошенной, сложной и нерегулярной формами, бимодальных распределений М-образного типа с 2 пиками и нисходящих обратной J-образной формы не отмечено. Обнаружено, что смесь скошено-нормальной модели последовательно продемонстрировала наилучшую производительность с точки зрения показателей соответствия Колмогорова–Смирнова и Андерсона–Дарлингга, информационных критериев Акаике и Байеса для всех пробных площадей. Оценка относительных рангов качества соответствия позволила ранжировать конечные смеси

следующим образом: Вейбулла (3,5 – наихудшее соответствие), логнормальное распределение (3,2), гамма (2,9) и скошено-нормальное распределение (1,0). Таким образом, модель конечной смеси, основанная на скошено-нормальном распределении, может надежно аппроксимировать вероятности распределения диаметров разновозрастных древостоев липы мелколистной, обладает высокой гибкостью, эффективна с точки зрения баланса между точностью и сложностью. Модели конечной смеси одновременно позволяют оценить долю и частотное распределение деревьев разных возрастов и могут стать ключевым инструментом для перевода данных полевых измерений в динамические модели, прогнозирующие развитие леса.

Ключевые слова: диаметр на высоте 1,3 м, распределение по диаметру, моделирование диаметров, модель конечной смеси, скошено-нормальное распределение, липа мелколистная, *Tilia cordata* Mill., Республика Башкортостан

Для цитирования: Габделхаков А.К., Фазлутдинов И.И., Коновалов В.Ф., Мартынова М.В., Гарфутдинова С.И. Распределение диаметров деревьев разновозрастных древостоев липы мелколистной // Изв. вузов. Лесн. журн. 2026. № 4. С. 20–34.

<https://doi.org/10.37482/0536-1036-2026-4-20-34>

Original article

Distribution of Tree Diameters in Mixed-Age Stands of Small-Leaved Linden

Aydar K. Gabdelkhakov[✉], *Candidate of Agriculture, Assoc. Prof.*; ResearcherID: [G-3023-2018](#), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7129-880X>

Ilyas I. Fazludinov², *Leading Specialist*; ResearcherID: [C-9581-2019](#), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0327-3752>

Vladimir F. Kononov¹, *Doctor of Agriculture, Prof.*; ResearcherID: [G-2775-2018](#), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2020-5540>

Maria V. Martynova¹, *Doctor of Agriculture, Assoc. Prof.*; ResearcherID: [G-4659-2018](#), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8804-8425>

Sabrina I. Garfutdinova³, *Head of Sector*; ResearcherID: [PGA-3926-2026](#), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4132-9410>

¹Bashkir State Agrarian University, Ufa, Russia; aliya201199@mail.ru[✉], vfkononov@bk.ru, maaarussia@mail.ru

²Ministry of Forestry Republic of Bashkortostan, Ufa, Russia; solnc2007@yandex.ru

³Ministry of Land and Property Regulations Republic of Bashkortostan, Ufa, Russia; sabrina.shatskaya@yandex.ru

Received on April 19, 2025 / Approved after reviewing on June 23, 2025 / Accepted on June 26, 2025

Abstract. Identification and assessment of quantitative parameters of forest stands are initial requirements for planning strategies and options for forestry measures. These parameters include structural diversity, which can be determined by modeling the density of distribution probability of tree diameters at breast height of 1.3 m (*dbh*). The study aimed at describing the tree stand structure and selecting the most appropriate finite mixture model (FMM) of the empirical diameter distribution of natural mixed-age small-leaved linden (*Tilia cordata* Mill.) stands in the central-eastern part of the Republic of Bashkortostan. We carried out

a hierarchical cluster analysis using Ward's method on tree parameters obtained from 19 sample plots, and determined the suitability of two-component finite mixture methods based on the gamma distribution, Weibull distribution, log-normal distribution, and skew-normal distribution. In order to fit the FMM to the diameter data, we used an expectation-maximization algorithm implemented in the ForestFit package, which was developed for the R environment. All the stands studied were classified as unimodal; the diameter distribution curves were described as skewed, complex, and irregular; no bimodal distributions of the M-shaped type with two peaks or downward-sloping inverted J-shaped distributions were observed. It was found that the mixture of the skew-normal model consistently demonstrated the best performance in terms of the Kolmogorov–Smirnov and Anderson–Darling goodness-of-fit statistics, as well as the Akaike and Bayes information criteria, for all sample plots. An assessment of the relative quality ranks of the correspondence allowed the finite mixtures to be ranked as follows: Weibull (3.5 – worst correspondence), log-normal distribution (3.2), gamma (2.9), and skew-normal distribution (1.0). Thus, an FMM based on a skew-normal distribution can reliably approximate the diameter distribution probabilities of small-leaved linden stands of mixed ages; it is highly flexible and offers an effective balance between accuracy and complexity. FMM allow the simultaneous estimation of the proportion and age distribution of trees and can serve as a key tool for converting field measurement data into dynamic models that predict forest development.

Keywords: diameter at a height of 1.3 m, diameter distribution, diameter modeling, finite mixture model, skew normal distribution, small-leaved linden, *Tilia cordata* Mill., Republic of Bashkortostan

For citation: Gabdelkhakov A.K., Fazlutdinov I.I., Konovalov V.F., Martynova M.V., Garfutdinova S.I. Distribution of Tree Diameters in Mixed-Age Stands of Small-Leaved Linden. *Lesnoy Zhurnal* = Russian Forestry Journal, 2026, no. 4, pp. 20–34. (In Russ.). <https://doi.org/10.37482/0536-1036-2026-4-20-34>

Введение

Распределение диаметров лесного насаждения является важной характеристикой, на ее основе можно оценить рост, запас насаждения, сортиментную структуру и спелость, определить стратегию планирования использования насаждения, варианты лесоводственных мероприятий в нем и др. [4, 5, 14]. Структура распределения диаметров выражается частотой диаметров деревьев и аппроксимирована функцией плотности вероятности (PDF) распределения. Для изучения свойств и управления насаждениями важно правильно подобрать PDF [9]. При рассмотрении разновозрастных древостоев здесь возникают трудности: эмпирические распределения диаметра являются асимметричными, многомодальными и имеют «толстый хвост», часто характеризуются случайными, локальными, нерегулярными и множественными режимами, которые отражают пики естественного возобновления в определенные промежутки времени и/или эпизодические выбросы роста отдельных деревьев, небольших групп деревьев после различного рода нарушений [13, 16, 17, 27]. Для моделирования PDF таких древостоев были предложены модели конечных смесей (FMM) [10, 27, 28].

Моделирование конечных смесей [10–12, 23, 26, 27] – это подход, применяемый для моделирования гетерогенных популяций, которые могут быть разделены на несколько однородных подгрупп (компонентов) [14]. Плотность

распределения конечной смеси K -компонент для случайной непрерывной величины x (например, диаметра дерева, высоты и т. д.) можно выразить как

$$g(x | \theta) = \sum_{k=1}^K \omega_k f(x | \theta_k),$$

где $g(x | \theta)$ – PDF распределения смеси моделей; $\theta = (\omega', \theta_1', \dots, \theta_k')$;

$f(x | \theta_k)$ – PDF распределения k -го отдельного компонента; $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ – вектор параметров смешивания отдельных компонентов в распределении смеси, который должен удовлетворять условию $0 \leq \omega_k \leq 1$, их сумма равна 1

(т. е. $\sum_{k=1}^K \omega_k = 1$) [23, 27].

В качестве компонентов PDF в исследованиях моделирования конечной смеси диаметров деревьев применяют распределения: Вейбулла [10, 11, 16, 28, 29]; гамма [7, 14, 16, 18]; нормальные [12, 14, 25]; логнормальные [14, 26, 27]; Гомперца [15], асимметрично- или скошено-нормальные [12, 21, 24], t -распределения и асимметричные t -распределения Стьюдента [12, 23, 24], экспоненциальные [20], гауссовы смеси [17].

В последние 25 лет FMM использовались для описания мультимодальной структуры древостоев со смешанными породами [10, 11, 28, 29], нарушенных насаждений [14, 15], распределений диаметров на высоте 1,3 м (dbh) разновозрастных насаждений [16, 18], имитационного моделирования и демонстрации производительности применяемого алгоритма FMM [21, 24, 27]. Исследования dbh -распределений разновозрастных насаждений липы редки [2, 3, 6].

Цель данного исследования – описать структуру древостоя и оценить способность аппроксимировать обобщенными моделями конечной смеси эмпирические распределения деревьев по диаметрам в естественных разновозрастных насаждениях липы мелколистной, произрастающих в центрально-восточной части Республики Башкортостан.

Объекты и методы исследования

Материал получен на 19 временных пробных площадях (ПП) размером 0,5–1,0 га, в естественных 2-возрастных насаждениях липы Архангельского лесничества Республики Башкортостан в 2019 и 2025 гг. ПП расположены между $54^{\circ}46'37''$ – $54^{\circ}6'28'96''$ с. ш. и $56^{\circ}57'858''$ – $56^{\circ}8'9764''$ в. д., на равнинных участках (склоны, чрезмерно сухие и влажные участки не рассматривались). Средняя высота исследованных территорий над уровнем моря составляет около 150 м. Климат резко континентальный, среднегодовая температура равняется 2–6 °С, годовое количество осадков – около 600 мм, из которых больше 1/2 приходится на вегетационный период, продолжающийся с мая по сентябрь.

Изученные древостои имеют порослевое происхождение, характеризуются II и III классами бонитета, сложной, 2-возрастной структурой с минимальным участием сопутствующих видов, относительная полнота – 0,4–1,0. На ПП для каждого элемента леса установлены при помощи мерной вилки $dbh > 6,9$ см с округлением до 1 см. Данные dbh были использованы для вычисления среднего квадратичного диаметра (DBH , см) и плотности (N , экз./га⁻¹) древостоев. За-

фиксированы высоты (h , м) учетных деревьев (случайным образом по 1–10 экз.) на каждую сантиметровую ступень толщины, по которым построены графики высот и рассчитаны средние для древостоя значения (H , м). Возраст каждого элемента леса древостоев (A , лет) определен путем подсчета колец на пнях срубленных деревьев и образцах кернов. Из множества переменных, полученных по данным ПП, в этом исследовании использовали только dbh .

Разделение эмпирических распределений dbh деревьев произведено с использованием иерархического кластерного анализа в программе Statistica. Кластеризация осуществлена методом Уорда с выбором в качестве меры Евклидова расстояния. Признаками кластеризации ПП были приняты частоты dbh -распределений по 4-сантиметровым ступеням толщины [1, 8].

Несгруппированные данные dbh проанализированы с использованием пакета ForestFit, разработанного для R [22]. Подгонка соответствия теоретическим моделям эмпирических распределений dbh деревьев осуществлялась с помощью FMM, использующих следующие распределения: 2-параметрические гамма, логнормальное, Вейбулла и 3-параметрическое скошено-нормальное – число k -компонентов при этом принято 2. Для подгонки FMM к данным 19 ПП применяли метод максимального правдоподобия с алгоритмом максимизации ожидания.

Функции плотности вероятности определяются следующим образом [22, 23]:

Вейбулла

$$f(x, \theta) = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{(x - \mu)}{\beta} \right]^{(\alpha-1)} \exp \left\{ - \left(\frac{x - \mu}{\beta} \right)^\alpha \right\};$$

гамма

$$f(x, \theta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp \left\{ - \frac{x}{\beta} \right\};$$

логнормальное

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta x}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln x - \mu}{\beta} \right]^2 \right\};$$

скошено-нормальное

$$f(x, \theta) = 2\phi \left(\frac{x - \mu}{\beta} \right) \Phi \left(\alpha \frac{x - \mu}{\beta} \right),$$

где θ – вектор параметров семейства; α , β и μ – параметры формы, масштаба и местоположения; $\Gamma(\cdot)$ – обычная гамма-функция, определяемая как $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$ при $x > 0$; $\phi(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ – функции плотности и распределения стандартного нормального распределения соответственно. Трехпараметрическое распределение Вейбулла при $\mu = 0$ упрощается до 2-параметрического [21–23].

Для сравнения и оценки моделей dbh -распределений использовались показатели соответствия: Колмогорова–Смирнова (KS) и Андерсона–Дарлинга (AD), информационные критерии Акаике (AIC) и Байеса (BIC). Меньшие значения этих показателей свидетельствуют о лучшем соответствии модели

[21–23]. Применение разных показателей обусловлено тем, что критерий AD более чувствителен к хвостам распределения, чем KS, а BIC по сравнению с AIC отдает предпочтение моделям проще, особенно при значительном объеме данных.

Ранжирование моделей конечных смесей выполнено с использованием относительного ранга [19]:

$$R_i = 1 + \frac{(m-1)(S_i - S_{\min})}{(S_{\max} - S_{\min})},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; m – количество оцененных моделей (4); S_i – статистический показатель соответствия модели i ; $S_{\max}$ и $S_{\min}$ – максимальное и минимальное значения S_i соответственно.

Относительный ранг – это действительное число от 1 (наилучшее) до n (наихудшее). Для каждой FMM относительные ранги суммировались для 4 показателей соответствия.

Результаты исследования и их обсуждение

В исследованных насаждениях количество деревьев липы варьирует от 352 до 668 экз.·га⁻¹. В составе также присутствуют дуб черешчатый (*Quercus robur* L.), клен остролистный (*Acer platanoides* L.), вяз (*Ulmus glabra* Huds.), береза повислая (*Betula pendula* L.) и осина (*Populus tremula* L.). Доля сопутствующих видов в насаждениях изменяется от 4,5 до 13,5 %. Описательная статистика для ПП представлена в табл. 1. Исследованные древостои ПП характеризуются деревьями разного возраста, высоты и диаметра, образующими сложную структуру без четкого деления на ярусы. Возраст старшего элемента леса липы варьирует от 70 до 100 лет, младшего – от 50 до 85 лет, при этом разница в возрасте в пределах ПП составляет от 15 до 25 лет. DBH липы варьируют от 27 до 41 см – для старшего поколения и от 18 до 27 см – для младшего. Разница в H между поколениями липы не превышает в среднем 3,9 м (17 %). В общей сложности для всех видов средняя площадь поперечного сечения составила 34,03 м²·га⁻¹.

Таблица 1

Сводная статистика для таксационных показателей древостоев 19 ПП
Summary statistics for the stands' inventory parameters of 19 sample plots

Показатель	A, лет		H, м		DBH, см		N, экз.·га ⁻¹			G, м ² ·га ⁻¹			M, м ³ ·га ⁻¹		
							всего	в т. ч.		всего	в т. ч.		всего	в т. ч.	
	ЛП1	ЛП2	ЛП1	ЛП2	ЛП1	ЛП2		ЛП1	ЛП2		ЛП1	ЛП2		ЛП1	ЛП2
Минимум	70	50	21,9	17,7	27,1	17,6	352	156	160	18,45	11,80	5,33	187	122	52
Максимум	100	85	23,9	20,9	40,9	27,1	668	306	366	52,09	30,26	17,09	528	320	156
Среднее	88	70	22,7	18,8	34,0	22,3	527	224	277	34,03	20,23	10,90	342	212	99
S	9	10	0,6	1,0	3,9	2,6	88	39	55	7,61	4,45	3,12	78	48	30

Примечание: S – стандартное отклонение; G – сумма площадей сечений; M – запас; ЛП1 и ЛП2 – липа старшего и младшего возрастов соответственно.

Основные статистики обобщенных (по всем древесным породам) рядов dbh-распределений ПП представлены в табл. 2. Средние арифметические значения dbh и S варьируют от 22,2 до 32,4 и от 6,8 до 10,4 см соответственно.

Диаметр самых толстых деревьев достигает 66 см. Для всех исследованных участков *dbh*-распределения имеют положительную асимметрию и разную степень эксцесса. Для 7 ПП эксцесс отрицательный, что наравне с большими стандартными отклонениями указывает на усложнение возрастной структуры древостоев. Стандартизированные тесты на асимметрию и эксцесс, критерии хи-квадрат и Шапиро–Уилка с 95%-й вероятностью отклонили предположение о принадлежности ПП к нормальному *dbh*-распределению.

Таблица 2

Сводные статистические данные для диаметра на высоте 1,3 м древостоев 19 ПП
Summary statistics for the stands' *dbh* (cm) for 19 sample plots

Показатель	n	D	D _{min}	D _{max}	Me	FMo	Q _{low}	Q _{up}	S	As	Ex
Минимум	352	22,2	8	49	22	26	17	26	6,8	0,221	-0,631
Максимум	668	32,4	15	66	31	68	25	39	10,4	1,139	2,668
Среднее	527	27,4	11	58	26	43	21	33	8,5	0,653	0,552
S	88	2,9	2	5	3	12	2	4	1,0	0,262	0,968

Примечание: n – размер выборки, экз. · га⁻¹; D – среднее арифметическое значение; D_{min}, D_{max} – минимальное и максимальное значения соответственно; Me – медиана; FMo – частота по моде; Q_{low} и Q_{up} – нижний и верхний квантили соответственно; As – коэффициент асимметрии; Ex – коэффициент эксцесса.

В исследуемых насаждениях *dbh*-распределения характеризовались сильно скошенной и нерегулярно убывающей формой. Дендрорама, полученная по результатам иерархического кластерного анализа, четко показывает слияние 10 мелких кластеров в 4 крупных (рис. 1).

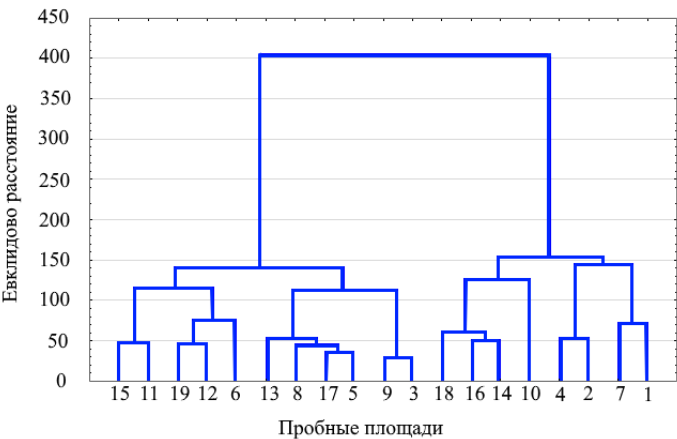


Рис. 1. Дендрограмма кластерного анализа *dbh*-распределений разновозрастных липняков

Fig. 1. Dendrogram of the cluster analysis of *dbh* distribution for mixed-age linden forests

Каждый кластер визуализирован отдельно (здесь приведены только наиболее характерные), что позволило все исследованные древостои отнести к унимодальному типу, кривые структуры *dbh*-распределений которых (рис. 2, 3) характеризуются следующим образом: 1) для ПП 1 и 7 с выраженной правосторонней асимметрией, 2 и 4 – неправильной формы; 2) для ПП 5, 8, 13 и 17 – неправильной формы, растянутые и правосторонне асимметричные, 3

и 9 – растянутые и плосковершинные с отрицательными E_x ; 3) для ПП 6, 11, 12, 15 и 19 – нерегулярные, растянутые, неправильной формы; 4) для ПП 10, 14, 16 и 18 – правосторонне-асимметричные распределения с As близким к 1,0. На 9 ПП dbh -распределения были прерывистыми. Среди исследованных древостоев бимодальных (М-образного типа с 2 пиками) и нисходящих (обратной J-образной формы) dbh -распределений не наблюдалось.

Анализ FMM и оценка их параметров проводятся при допущении определенного числа компонентов. Применение 2-компонентных FMM объясняется наличием деревьев 2 возрастов на исследованных ПП. Для нерегулярных эмпирических dbh -распределений и 2-возрастных древостоев использование 2-компонентных FMM является целесообразным [7, 15]. Однако если нет биологических или теоретических доказательств принадлежности популяции к смеси, то хорошее соответствие смеси 2 распределений не доказывает наличие 2 компонентов в распределении [26].

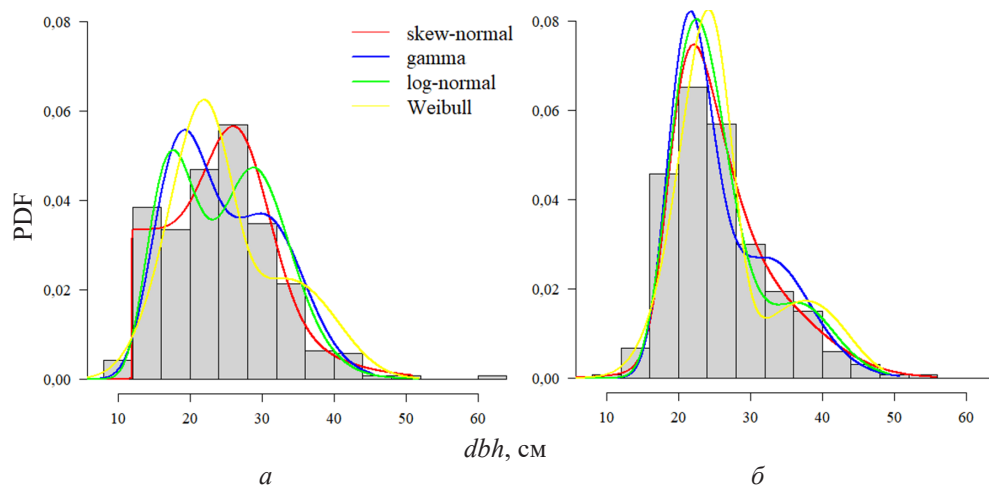


Рис. 2. Гистограммы данных dbh и PDF смеси скошено-нормальной (skew-normal, красная линия), гамма (gamma, синяя), логнормальной (log-normal, зеленая) и Вейбулла (Weibull, желтая) моделей для ПП: a – 6; b – 10

Fig. 2. Histograms of dbh data and probability density functions (PDF) for mixture of skew-normal (red line), gamma (blue line), log-normal (green line), and Weibull (yellow line) models for sample plots: a – 6; b – 10

Оценочные параметры рассматриваемых моделей смесей представлены в табл. 3. Различные значения параметров FMM ПП указывают на разницу в структуре лесных насаждений и могут зависеть от многих факторов, таких как возраст, плотность, тип леса, рубки ухода и др. В качестве примера на рис. 2 показаны относительная частота деревьев по ступеням толщины и принятые 4 FMM 2 ПП. Обе выборки данных демонстрируют скошенное распределение. Наиболее подходящими для описания распределения диаметров деревьев в данных выборках выступают FMM, использующие скошено-нормальное распределение и распределение Вейбулла, визуально лучше аппроксимируя форму гистограмм, а также наиболее точно повторяя пики и хвосты распределений. Большие различия между соседними классами dbh по N часто делают сложной аппроксимацию эмпирических распределений теоретическими (рис. 2, ПП 6). Для разновозрастных насаждений, характеризующихся близкими к унимодаль-

ным распределениям, трудность установления сходимости оценки FMM отмечают и другие исследователи [7, 10, 26].

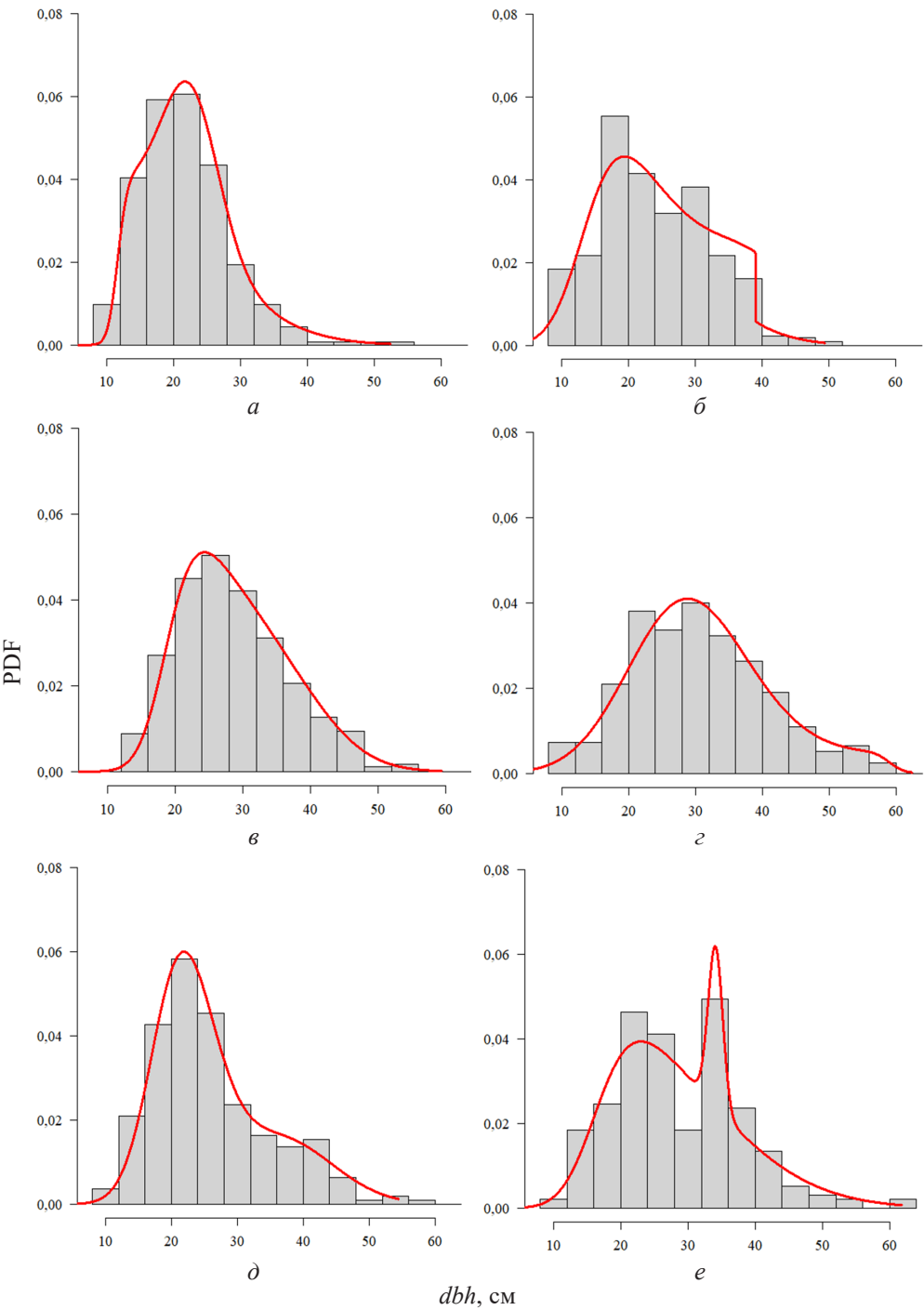


Рис. 3. Гистограммы данных *dbh* и PDF смеси скошено-нормальной модели для ПП: *a* – 1; *б* – 4; *в* – 8; *г* – 9; *д* – 10; *е* – 12

Fig. 3. Histograms of *dbh* data and PDF for the skew-normal mixture model for sample plots: *a* – 1; *б* – 4; *в* – 8; *г* – 9; *д* – 10; *е* – 12

Таблица 3

Параметры подгонки моделей конечной смеси к данным *dbh* для ПП
Fitting parameters for FMM to *dbh* data for sample plots

ПП	Распреде- ление	ω_1	ω_2	α_1	α_2	β_1	β_2	μ_1	μ_2
1	Вейбулла	0,52368	0,47632	4,61707	6,60050	30,17809	18,71384	—	—
	Гамма	0,62744	0,37256	25,14287	35,66596	0,72121	0,81287	—	—
	Логнор- мальное	0,54153	0,45847	—	—	0,19182	0,16861	2,83970	3,31405
	Скошено- нормаль- ное	0,62288	0,37712	11,13097	−0,07074	12,97701	4,18708	11,62862	22,79190
4	Вейбулла	0,45832	0,54168	6,23047	5,04576	34,67981	19,77159	—	—
	Гамма	0,43386	0,56614	41,39598	15,63631	0,77233	1,13372	—	—
	Логнор- мальное	0,42290	0,57710	—	—	0,15389	0,26752	3,45272	2,84279
	Скошено- нормаль- ное	0,16590	0,83410	−343,54137	2,87867	7,88423	12,10761	39,06376	13,35997
6	Вейбулла	0,40876	0,59124	5,07510	5,50088	34,90982	22,29857	—	—
	Гамма	0,38872	0,61128	44,19171	20,04844	0,72613	1,00540	—	—
	Логнор- мальное	0,51905	0,48095	—	—	0,15670	0,20924	3,40428	2,91133
	Скошено- нормаль- ное	0,40288	0,59712	−0,03484	928,26378	4,40359	14,30649	26,88800	11,95603
8	Вейбулла	0,42267	0,57733	6,68892	6,98308	39,69929	25,53128	—	—
	Гамма	0,33485	0,66515	59,06953	29,20456	0,64396	0,83108	—	—
	Логнор- мальное	0,37151	0,62849	—	—	0,13546	0,18328	3,60982	3,15505
	Скошено- нормаль- ное	0,19934	0,80066	−0,06300	3,31338	7,31553	11,15113	36,42580	18,75170
9	Вейбулла	0,41086	0,58914	6,19211	5,08511	44,55108	26,63560	—	—
	Гамма	0,42994	0,57006	37,59165	14,48649	1,07245	1,62240	—	—
	Логнор- мальное	0,41810	0,58190	—	—	0,16068	0,28535	3,68337	3,12221
	Скошено- нормаль- ное	0,91210	0,08790	1,14328	−9,63098	11,44097	16,02564	22,65759	59,04539
10	Вейбулла	0,27214	0,72786	6,57506	7,21354	38,61938	24,57506	—	—
	Гамма	0,34725	0,65275	39,36072	46,05380	0,86018	0,47932	—	—
	Логнор- мальное	0,16347	0,83653	—	—	0,11530	0,18131	3,63858	3,14694
	Скошено- нормаль- ное	0,65891	0,34109	2,66795	−0,03787	6,35733	8,22149	18,74834	31,86281
12	Вейбулла	0,47713	0,52287	5,84991	5,15330	23,75449	40,61829	—	—
	Гамма	0,44777	0,55223	40,81086	19,84911	0,92640	1,10498	—	—
	Логнор- мальное	0,56398	0,43602	—	—	0,23378	0,15163	3,06258	3,62020
	Скошено- нормаль- ное	0,10284	0,89716	−0,04239	3,82044	1,08471	15,74404	34,13024	16,30076

Окончание табл. 3

ПП	Распреде- ление	ω_1	ω_2	α_1	α_2	β_1	β_2	μ_1	μ_2
14	Вейбулла	0,66818	0,33182	6,04786	5,80900	23,36409	40,70642	—	—
	Гамма	0,72682	0,27318	23,26183	41,09617	0,93830	0,93359	—	—
	Логнор- мальное	0,26537	0,73463	—	—	0,15424	0,21369	3,63498	3,06148
	Скошено- нормаль- ное	0,31431	0,68569	−0,02850	1,13097	8,04338	6,05387	36,55395	18,47049

Гистограммы рис. 3 также демонстрируют левостороннюю асимметрию, что указывает на преобладание деревьев меньших *dbh*. Такое распределение характерно для 2-возрастных древостоев, где большая часть деревьев относится к молодому поколению, которое еще не достигло максимального роста старшего элемента леса. Все 6 сценариев PDF показывают на унимодальные распределения, в т. ч. ПП 12, где наблюдается 2-вершинность деревьев, и которую следует отнести к неравномерному, нарушенному типу.

Значения параметров смешивания компонентов (ω_i) показывают вклад отдельного компонента в общее *dbh*-распределение насаждений [14]. Для рассматриваемых в исследовании FMM выявлены как близкие значения для некоторых ПП (4, 15, 19), так и ощутимые различия (ПП 5, 8, 10). При сравнении соотношений ω_i с данными натурных пересчетов компонентов (элементов леса липы) различия оказались существенными, что свидетельствует о невысокой точности деления возрастных групп элементов леса при натурной таксации. Повышение точности интерпретации возрастной структуры требует извлечения большего количества кернов из деревьев на ПП, но эта процедура трудоемка и нецелесообразна, когда необходимо провести инвентаризацию обширных территорий. Кроме того, точность определения возраста деревьев липы ограничена частым возникновением сердцевинной гнили. Поэтому возможность косвенной оценки возрастной структуры путем интерпретации распределения частоты диаметров является перспективным методом.

Оценка качества соответствия FMM представлена в табл. 4. Обнаружено, что смесь скошено-нормальной модели последовательно продемонстрировала наилучшую производительность с точки зрения мер KS и AD, AIC и BIC для всех рассматриваемых ПП. Оценка относительных рангов качества соответствия FMM позволила ранжировать FMM следующим образом: Вейбулла (3,5 – наихудшее соответствие), логнормальное распределение (3,2), гамма (2,9) и скошено-нормальное распределение (1,0). Это согласуется с данными М. Zasada и С. Cieszewski [26], которые отмечают, что гамма FMM превосходит нормальное и логнормальное распределения для характеристики *dbh*-распределения по социальным классам деревьев сосны обыкновенной; F. Ogana [15], показавшего превосходство гамма FMM над Вейбулла; Е. Zenner и М. Teimouri [27], продемонстрировавших лучшую сходимость логарифмически нормального и гамма распределений, чем у распределения Вейбулла. По сравнению с традиционными моделями FMM аппроксимируют сложные и смешанные насаждения регулярной и нерегулярной структуры с высокой точностью, соответствуют *dbh*-распределениям вокруг наибольших локальных максимумов [18, 26, 29].

Таким образом, скошено-нормальная FMM может надежно аппроксимировать PDF диаметров разновозрастных древостоев липы мелколистной и стать ключевым инструментом для перевода данных полевых измерений в динамические модели, прогнозирующие развитие леса.

Таблица 4

Показатели соответствия для применения моделей конечной смеси для ПП
Compliance parameters for the application of FMM for sample plots

ПП	Показатель	Распределение			
		Вейбулла	гамма	логнормальное	скошено-нормальное
1	KS	0,111	0,076	0,078	0,042
	AD	8,864	4,757	4,740	0,902
	AIC	4509,412	4433,810	4425,402	4355,660
	BIC	4531,933	4456,331	4447,923	4378,190
4	KS	0,078	0,105	0,120	0,059
	AD	3,138	3,847	5,093	1,098
	AIC	3858,516	3857,571	3872,067	3813,722
	BIC	3879,992	3879,047	3893,543	3835,199
6	KS	0,093	0,086	0,091	0,046
	AD	4,754	3,627	3,031	0,736
	AIC	2465,235	2434,328	2417,706	2361,350
	BIC	2484,553	2453,646	2437,024	2380,668
8	KS	0,076	0,076	0,084	0,042
	AD	2,589	2,055	2,393	0,458
	AIC	3173,575	3153,083	3157,731	3130,518
	BIC	3194,132	3173,640	3178,288	3151,075
9	KS	0,081	0,075	0,093	0,042
	AD	3,916	5,044	6,787	0,920
	AIC	4689,929	4706,404	4733,698	4628,150
	BIC	4712,062	4728,536	4755,831	4650,283
10	KS	0,086	0,086	0,078	0,053
	AD	3,875	3,356	2,898	1,407
	AIC	4425,982	4419,576	4394,769	4376,450
	BIC	4448,504	4442,097	4417,290	4398,971
12	KS	0,113	0,089	0,100	0,053
	AD	6,908	4,081	4,426	1,346
	AIC	3624,924	3591,890	3592,037	3532,113
	BIC	3645,855	3612,821	3612,968	3553,044
14	KS	0,071	0,102	0,115	0,077
	AD	2,460	3,154	4,296	1,415
	AIC	3898,285	3883,967	3892,434	3867,974
	BIC	3919,834	3905,516	3913,983	3889,523

Заклучение

Представленный в работе метод позволяет анализировать структуру древостоев, основываясь исключительно на измерениях диаметра. В ис-

следованных естественных разновозрастных насаждениях липы мелколистной эмпирические распределения по диаметру характеризуются нерегулярными, сложными и скошенными формами унимодального типа. Данные распределения наилучшим образом аппроксимируются моделями конечных смесей, которые одновременно позволяют оценить долю и частотное распределение 2-возрастных компонентов. Среди рассмотренных в работе 4 моделей конечных смесей использующая скошено-нормальное распределение установлена как наилучшая для моделирования распределений по диаметру на исследованных пробных площадях. Она продемонстрировала эффективность с точки зрения баланса между точностью и сложностью. Моделирование конечных смесей представляет собой полезный инструмент для характеристики разнообразия структуры древостоев, прогнозирования динамики леса и планирования лесохозяйственных мероприятий. Направлением дальнейшего развития апробированного в настоящей работе подхода к исследованию разновозрастных древостоев липы мелколистной может стать установление взаимосвязи между параметрами древостоев и моделей конечных смесей для различных стадий развития насаждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Габделхаков А.К., Коновалов В.Ф., Рахматуллин З.З., Мартынова М.В., Фазлутдинов И.И. Вариативность диаметров деревьев в древостоях липы мелколистной // Изв. вузов. Лесн. журн. 2025. № 1. С. 42–57.

Gabdelkhakov A.K., Konovalov V.F., Rakhmatullin Z.Z., Martynova M.V., Fazlutdinov I.I. Variability of Tree Diameters in Small-Leaved Linden Stands. *Lesnoy Zhurnal* = Russian Forestry Journal, 2025, no. 1, pp. 42–57. (In Russ.). <https://doi.org/10.37482/0536-1036-2025-1>

2. Габделхаков А.К., Ситдииков М.Р. Ход роста деревьев липы мелколистной в разновозрастном древостое // Вестн. БГАУ. 2013. № 3(27). С. 119–122.

Gabdelkhakov A.K., Sitdikov M.R. *Tilia cordata* Mill. Growth Rate in an Uneven-Aged Stand. *Vestnik BSAU*, 2013, no. 3(27), pp. 119–122. (In Russ.).

3. Ганина Н.В. Распределение деревьев по диаметру с помощью функции Вейбулла // Лесоведение. 1984. № 2. С. 65–70.

Ganina N.V. Diameter Distribution of Trees by the Weibull Distribution. *Lesovedenie* = Forest Science, 1984, no. 2, pp. 65–70. (In Russ.).

4. Дубенок Н.Н., Лебедев А.В., Кузьмичев В.В. Оценка статистических моделей распределения деревьев по диаметру в культурах сосны // Лесохоз. информ. 2022. № 1. С. 50–61. <https://doi.org/10.24419/LHI.2304-3083.2022.1.03>

Dubenok N.N., Lebedev A.V., Kuzmichev V.V. Estimation of Statistical Models of Distribution of Diameters of Trees in Pine Plantations. *Forestry information*, 2022, no. 1, pp. 50–61. (In Russ.). <https://doi.org/10.24419/LHI.2304-3083.2022.1.03>

5. Bassil S., Nyland R.D., Kern Ch.C., Kenefic L.S. Dynamics of the Diameter Distribution after Selection Cutting in Uneven- and Even-Aged Northern Hardwood Stands: A Long-Term Evaluation. *Canadian Journal of Forest Research*, 2019, vol. 49, no. 12, pp. 1525–1539. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2019-0204>

6. Jaworski A., Kołodziej Z., Bartkiewicz L. Structure and Dynamics of Stands of Primeval Character Composed of the Little-Leaf Linden (*Tilia cordata* Mill.) in the “Las lipowy Obrozyska” Reserve (Southern Poland). *Journal of Forest Science*, 2005, vol. 51, no. 7, pp. 283–304. <https://doi.org/10.17221/4565-JFS>

7. Jaworski A., Podlaski R. Modelling Irregular and Multimodal Tree Diameter Distributions by Finite Mixture Models: An Approach to Stand Structure Characterization. *Journal of Forest Research*, 2012, vol. 17(1), pp. 79–88. <https://doi.org/10.1007/s10310-011-0254-9>

8. Kara F. Comparison of Tree Diameter Distributions in Managed and Unmanaged Kazdaği Fir Forests. *Silva Balcanica*, 2021, vol. 22(1), pp. 31–43.

<https://doi.org/10.3897/silvabalcanica.22.e58020>

9. Liu C., Beaulieu J., Prigent G., Zhang S.Y. Applications and Comparison of Six Methods for Predicting Parameters of the Weibull Function in Unthinned *Picea glauca* Plantations. *Scandinavian Journal of Forest Research*, 2009, vol. 24, iss. 1, pp. 67–75.

<https://doi.org/10.1080/02827580802644599>

10. Liu C., Zhang L., Davis C.J., Solomon D.S., Grove J.H. A Finite Mixture Model for Characterizing the Diameter Distribution of Mixed-Species Forest Stands. *Forest Science*, 2002, vol. 48, iss. 4, pp. 653–661. <https://doi.org/10.1093/forestscience/48.4.653>

11. Liu F., Li F., Zhang L., Jin X. Modeling Diameter Distributions of Mixed-Species Forest Stands. *Scandinavian Journal of Forest Research*, 2014, vol. 29, iss. 7, pp. 653–663. <https://doi.org/10.1080/02827581.2014.960891>

12. McLachlan G.J., Lee S.X., Rathnayake S.I. Finite Mixture Models. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 2019, vol. 6, pp. 355–378.

<https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-031017-100325>

13. Nagel T.A., Svoboda M., Diaci J. Regeneration Patterns after Intermediate Wind Disturbance in an Old-Growth *Fagus–Abies* Forest in Southeastern Slovenia. *Forest Ecology and Management*, 2006, vol. 226, iss. 1-3, pp. 268–278.

<https://doi.org/10.1016/j.foreco.2006.01.039>

14. Ogana F.N. Application of Finite Mixture to Characterise Degraded *Gmelina arborea* Roxb Plantation in Omo Forest Reserve, Nigeria. *Journal of Forest and Environmental Science*, 2018, vol. 34, iss. 6, pp. 451–456. <https://doi.org/10.7747/JFES.2018.34.6.451>

15. Ogana F.N. Evaluation of Finite Mixture Models for Describing the Structure of Disturbed *Gmelina* Stands in Oluwa Forest Reserve, Nigeria. *Floresta*, 2021, vol. 51, iss. 3, pp. 794–802. <https://doi.org/10.5380/rf.v51i3.73163>

16. Podlaski R. Two-Component Mixture Models for Diameter Distributions in Mixed-Species, Two-Age Cohort Stands. *Forest Science*, 2010, vol. 56, iss. 4, pp. 379–390. <https://doi.org/10.1093/forestscience/56.4.379>

17. Podlaski R. Highly Skewed and Heavy-Tailed Tree Diameter Distributions: Approximation Using the Gamma Shape Mixture Model. *Canadian Journal of Forest Research*, 2016, vol. 46, iss. 11, pp. 1275–1283. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2016-0175>

18. Podlaski R., Roesch F.A. Modelling Diameter Distributions of Two-Cohort Forest Stands with Various Proportions of Dominant Species: A Two-Component Mixture Model Approach. *Mathematical Biosciences*, 2014, vol. 249, iss. 1, pp. 60–74.

<https://doi.org/10.1016/j.mbs.2014.01.007>

19. Poudel K.P., Cao Q.V. Evaluation of Methods to Predict Weibull Parameters for Characterizing Diameter Distributions. *Forest Science*, 2013, vol. 59, iss. 2, pp. 243–252.

<https://doi.org/10.5849/forsci.12-001>

20. Seidel W., Mosler K., Alker M. A Cautionary Note on Likelihood Ratio Tests in Mixture Models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2000, vol. 52, iss. 3, pp. 481–487. <https://doi.org/10.1023/A:1004117419204>

21. Teimouri M. EM Algorithm for Mixture of Skew-Normal Distributions Fitted to Grouped Data. *Journal of Applied Statistics*, 2021, vol. 48, iss. 7, pp. 1154–1179.

<https://doi.org/10.1080/02664763.2020.1759032>

22. Teimouri M., Doser J., Finley A. ForestFit: An R Package for Modeling Plant Size Distributions. *Environmental Modelling & Software*, 2020, vol. 131, iss. 2, art. 104668. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2020.104668>

23. Teimouri M., Podlaski R. Modeling Tree Diameters Using Mixtures of Skewed Student's *t* and Related Distributions. *Canadian Journal of Forest Research*, 2020, vol. 50, iss. 10, pp. 1039–1049. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2020-0008>

24. Teimouri M., Rezakhah S., Mohammadpour A. EM Algorithm for Symmetric Stable Mixture Model. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 2018, vol. 47, iss. 2, pp. 582–604. <https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1288244>

25. Zasada M. Evaluation of the Double Normal Distribution for Tree Diameter Distribution Modeling. *Silva Fennica*, 2013, vol. 47, no. 2, art. 956. <https://doi.org/10.14214/sf.956>

26. Zasada M., Cieszewski C.J. A Finite Mixture Distribution Approach for Characterizing Tree Diameter Distributions by Natural Social Class in Pure Even-Aged Scots Pine Stands in Poland. *Forest Ecology and Management*, 2005, vol. 204, iss. 2-3, pp. 145–158. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2003.12.023>

27. Zenner E.K., Teimouri M. Modeling in Forestry Using Mixture Models Fitted to Grouped and Ungrouped Data. *Forests*, 2021, vol. 12(9), art. 1196. <https://doi.org/10.3390/f12091196>

28. Zhang L., Gove J.H., Liu C., Leak W.B. A Finite Mixture of Two Weibull Distributions for Modeling the Diameter Distributions of Rotated-Sigmoid, Uneven-Aged Stands. *Canadian Journal of Forest Research*, 2001, vol. 31, no. 9, pp. 1654–1659. <https://doi.org/10.1139/x01-086>

29. Zhang L., Liu Ch. Fitting Irregular Diameter Distributions of Forest Stands by Weibull, Modified Weibull, and Mixture Weibull Models. *Journal of Forest Research*, 2006, vol. 11, iss. 5, pp. 369–372. <https://doi.org/10.1007/s10310-006-0218-7>

Конфликт интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest