

УДК 531.001

С.И. Морозов

Морозов Станислав Иванович родился в 1929 г., окончил в 1952 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Архангельского государственного технического университета, член-корреспондент РИА, заслуженный деятель науки и техники РФ. Имеет более 160 печатных работ в области изучения устойчивости температурно-напряженного рельсового пути, закрепления его от угона рельсов, удара тел, применения ЭВМ при решении задач механики.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СЖАТИЕ И УДАР ДВУХ УПРУГОПЛАСТИЧНЫХ ТЕЛ

Приведена методика решения задач на контактное сжатие и соударение двух упругопластичных тел. Предложены расчетные выражения для определения параметров силовой функции на стадиях нагрузки и разгрузки взаимодействующих тел в зависимости от их твердости.

Ключевые слова: удар, упругость, деформация, силовая функция, показатели пластичности и нелинейности.

В 1881 г. немецкий ученый Г. Герц предложил новую (контактную) теорию удара [4]. Он установил, что упругое состояние тел вблизи поверхности удара за все его время весьма близко к такому же состоянию равновесия, которое возникло бы при сжатии тел. Таким образом, по мнению Герца, задача удара двух тел сводится к решению задачи на их сжатие.

Теория Герца не рассматривает упругих колебаний тел, возникающих при ударе. Такое предположение справедливо при условии, что скорости движения тел до удара значительно меньше скорости звука в материалах тел. Следовательно, это решение имеет силу лишь до предела упругости.

Используя теорию Герца, украинский ученый А.Н. Динник [1] определил, что 97 % деформации тел происходит вблизи точки удара (или сжатия), а в остальном пространстве тел – только 3%. Таким образом, сближение тел α зависит исключительно от их деформации вблизи поверхности взаимодействия.

Целью данной статьи является вывод расчетных зависимостей для определения силы удара на базе теоретических и экспериментальных исследований, приведенных в работах [1–4].

Сжатие (удар) упругих тел

Этот случай контактного удара теоретически исследовали Г. Герц и А.Н. Динник. Ими получено следующее основное уравнение (силовая функция) для упругого удара:

$$F = K\alpha^{1,5}, \quad (1)$$

где F – сжимающая (контактная) сила;

K – коэффициент пластичности (упругости) Г. Герца;

α – деформация тел в точке их взаимодействия;

1,5 – показатель степени (коэффициент нелинейности).

Коэффициент K можно вычислить по формуле [4]

$$K = \frac{4}{3} \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (2)$$

где μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона;

E_1, E_2 – модули упругости (Юнга);

R_1, R_2 – радиусы шаров.

Выражение (2) можно рассматривать как произведение двух сомножителей:

$$K = K_0 \rho, \quad (3)$$

где K_0 – основной коэффициент пластичности (упругости) Герца

$$K_0 = \frac{4}{3} \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1}, \quad (4)$$

зависящий от механических свойств взаимодействующих тел (шаров);

ρ – приведенный радиус кривизны сферических тел,

$$\rho = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (5)$$

Если материалы и радиусы тел одинаковы ($\mu_1 = \mu_2, E_1 = E_2, R_1 = R_2$), то для определения K_0 и ρ получим следующие выражения:

$$K_0 = \frac{2}{3} \frac{E}{1-\mu^2}; \quad (6)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{R}{2}}. \quad (7)$$

Значения K_0 зависят от механических свойств тел. Для некоторых тел они приведены в табл. 1.

С помощью данных табл. 1 можно найти значения K_0 для любых размеров шаров. Например, для легированной стали при $\mu = 0,3, E = 2,15 \cdot 10^{11}$ Па имеем: $K_0 = 157,5 \cdot 10^{11}$ Па/м. В табл. 2 приведены значения K , вычисленные по формуле (4) в зависимости от $K_0 = 2,15 \cdot 10^{11}$ и приведенных радиусов шаров.

В частных случаях значения ρ находим по выражениям:

– сжатие двух тел одинакового радиуса $R_1 = R_2 = R$:

$$\rho = \sqrt{R/2}; \quad (8a)$$

– сжатие двух тел разных радиусов $R_1 \neq R_2$:

$$\rho = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (8б)$$

– сжатие круглого тела о плоскость $R_1 = R$, $R_2 = \infty$:

$$\rho = \sqrt{R}. \quad (8в)$$

Таким образом, задача по определению сил сжатия для упругого удара тел решена до конца.

Таблица 1

Материалы соударяющихся тел	$E \cdot 10^{-11}$, Па	μ	$K_0 \cdot 10^{-11}$, Па/м
Легированная сталь о сталь	2,15	0,30	1,575
Железо о железо	2,00	0,27	1,738
Чугун о чугун	1,15	0,27	0,821
Медь о медь	1,10	0,37	0,850
Бронза о бронзу	1,10	0,35	0,836
Алюминий об алюминий	0,70	0,36	0,576
Свинец о свинец	0,18	0,42	0,147

Таблица 2

Радиус шаров R , м	Приведенный радиус ρ , м	Значения $K \cdot 10^{-9}$, Па	Радиус шаров R , м	Приведенный радиус ρ , м	Значения $K \cdot 10^{-9}$, Па
0,005160	0,05079	7,998	0,00928	0,06756	10,640
0,006350	0,05635	8,875	0,01111	0,07454	11,740
0,007938	0,06230	9,922	–	–	–

Сжатие (удар) упругопластичных тел

В данном случае коэффициенты пластичности и нелинейности находят экспериментально. Такие опыты были проведены Д.Н. Шостенко [2] в лабораторных условиях [3] на специальной установке, состоящей из универсального микроскопа УИМ-1 и динамического пресса. С помощью пресса к группе из двух шаров прикладывали сжимающую силу F , и под микроскопом определяли деформацию тел α в точке их соприкосновения.

Сжимающую силу F прикладывали в диапазоне ее изменения от нуля до 10 кН, через 1 кН. После достижения максимальных значений F шарики разгружали от 10 кН до нуля с тем же самым шагом. На каждой ступени разгрузки с помощью микроскопа определяли новые значения величины α . Каждый опыт повторяли три раза и в дальнейшем использовали средние значения α .

Всего, таким образом, было испытано пять групп стальных шаров различных радиусов, которые отличались друг от друга твердостью (шесть значений) их материала.

Результаты опытов аппроксимировали с помощью уравнений:

– на стадии нагрузки (при изменении F от 0 до 10 кН и α от нуля до максимального значения α_m)

$$F = B\alpha^n, \tag{9a}$$

где B – коэффициент пластичности;
 n – коэффициент нелинейности;
 α – контактная деформация тел.

– на стадии разгрузки (при изменении F от 10 кН до 0 и α от α_m до нуля)

$$F = B_1(\alpha - \alpha_1)^{n_1}, \tag{9б}$$

где B_1 – коэффициент пластичности при разгрузке;
 n_1 – коэффициент нелинейности при разгрузке;
 α – текущая контактная деформация тел;
 α_1 – остаточная деформация.

Экспериментальные графики $F(\alpha)$ зависят, помимо прочих величин, от твердости материалов тел T . На рис. 1 приведен график для случая $T = 65$ HRC, диаметр шаров 10,319 мм (1 – стадия нагрузки; 2 – разгрузки).

Результаты опытов по определению расчетных параметров приведены в табл. 3.

По аналогии со случаем упругого сжатия и удара (формула (3)) предположим, что значение F при постоянном значении T можно выразить в виде произведений:

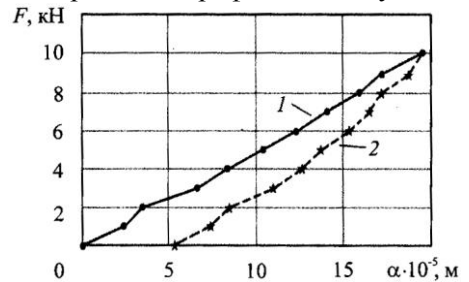


Рис. 1.

Таблица 3

Твердость T , HRC	Диаметр шаров, мм	Масса шаров, кг	Нагрузка			Разгрузка		
			$B \cdot 10^{-9}$, Па	n	$\alpha_m \cdot 10^{-3}$, м	$B_1 \cdot 10^{-9}$, Па	n_1	$\alpha_1 \cdot 10^{-3}$, м
65	10,319	0,00448	2,512	1,447	0,195	2,245	1,396	0,053
	12,700	0,00835	4,151	1,496	0,113	6,035	1,396	0,039
	15,875	0,01634	7,924	1,485	0,112	6,185	1,500	0,042
	18,256	0,02480	8,751	1,485	0,119	11,349	1,500	0,034
	22,225	0,04484	9,273	1,492	0,099	12,806	1,500	0,027
60	10,319	0,00448	0,353	1,296	0,207	0,424	1,187	0,063
	12,700	0,00835	0,657	1,241	0,158	0,675	1,210	0,045
	15,875	0,01634	0,736	1,228	0,144	0,875	1,206	0,049
	18,256	0,02480	1,806	1,306	0,134	1,726	1,268	0,053
	22,225	0,04484	5,648	1,377	0,112	5,059	1,302	0,036
50	10,319	0,00448	0,297	1,033	0,227	0,244	1,109	0,105
	12,700	0,00835	0,363	1,147	0,190	0,406	1,126	0,079
	15,875	0,01634	0,471	1,106	0,189	0,828	1,197	0,080

	18,256	0,02480	0,563	1,175	0,156	0,889	1,179	0,066
	22,225	0,04484	1,529	1,190	0,138	1,050	1,136	0,044
38	10,319	0,00448	0,093	1,093	0,239	0,124	1,003	0,188
	12,700	0,00835	0,108	1,141	0,213	0,229	1,163	0,166
	15,875	0,01634	0,222	1,110	0,138	0,806	1,132	0,114
	18,256	0,02480	0,375	1,107	0,163	0,713	1,103	0,123
	22,225	0,04484	0,560	1,144	0,188	0,716	1,197	0,092
28	10,319	0,00448	0,043	1,103	0,232	0,082	1,170	0,209
	12,700	0,00835	0,045	1,061	0,203	0,204	1,134	0,183
	15,875	0,01634	0,165	1,091	0,133	0,287	1,180	0,119
	18,256	0,02480	0,262	1,094	0,144	0,737	1,181	0,129
	22,225	0,04484	0,365	1,094	0,212	0,888	1,122	0,110
HB 166 (при мерно $T=0$ в HRC)	10,319	0,00448	0,013	1,050	0,326	0,046	1,017	0,290
	12,700	0,00835	0,047	1,047	0,324	0,287	1,133	0,298
	15,875	0,01634	0,118	1,109	0,226	0,212	1,002	0,198
	18,256	0,02480	0,234	1,087	0,245	0,258	1,065	0,177
	22,225	0,04484	0,302	1,041	0,286	0,282	1,105	0,205

– на стадии нагрузки

$$F = B_0 \rho \alpha^n; \quad (10a)$$

– на стадии разгрузки

$$F = B_{10} \rho (\alpha - \alpha_1)^n, \quad (10б)$$

где B_0 , B_{10} – основные коэффициенты пластичности при нагрузке и разгрузке;

ρ – приведенный радиус кривизны взаимодействующих шаров.

Предположим также, что значения B_0 , B_{10} для каждого значения твердости постоянны, т. е.

$$B = B_0 \rho;$$

$$B_{10} = B_1 \rho.$$

Все экспериментальные величины приведены в табл. 4. Зная их, можно найти значения B_0 , B_{10} , которые зависят от радиусов шаров. Они приведены в графах 5 и 10.

Таблица 4

Т, HRC	ρ , м	Нагрузка					Разгрузка			
		$B \cdot 10^{-9}$,	$B_0 \cdot 10^{-9}$	$B_{0cp} \cdot 10^{-9}$	$B_{рас} \cdot 10^{-9}$,	$B_1 \cdot 10^{-9}$,	$B_{10} \cdot 10^{-9}$	$B_{10cp} \cdot 10^{-9}$	$B_{рас} \cdot 10^{-9}$,	
		Па	Па/м		Па	Па	Па/м		Па	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
65	0,0508	2,512	49,45	126,00	6,43	2,245	44,19	135,82	6,98	
	0,0564	4,151	74,60		7,13	6,035	107,00		7,65	
	0,0630	7,924	125,80		7,98	6,185	98,18		8,56	
	0,0675	8,751	129,60		8,52	11,35	175,84		9,17	
	0,0745	9,273	124,40		9,44	12,09	162,14		10,12	

60	0,0508	0,353	6,75	38,06	1,43	0,424	8,35	26,58	1,35
	0,0564	0,657	11,52		2,15	0,675	11,98		1,50
	0,0630	0,736	11,68		2,40	0,875	13,89		1,67
	0,0675	1,086	16,00		2,57	1,726	25,56		1,79
	0,0745	5,648	75,81		2,84	5,059	67,87		1,98
50	0,0508	0,297	5,85	11,90	0,60	0,244	4,80	13,46	0,68
	0,0564	0,363	6,44		0,67	0,406	7,20		0,76
	0,0630	0,431	6,84		0,75	0,828	13,16		0,85
	0,0675	0,563	8,33		0,80	0,889	13,10		0,91
	0,0745	1,529	20,51		0,89	1,050	14,09		1,00
38	0,0508	0,093	9,83	4,01	0,20	0,124	2,44	9,17	0,52
	0,0564	0,108	2,92		0,23	0,229	4,06		0,57
	0,0630	0,222	3,52		0,25	0,706	9,62		0,64
	0,0675	0,375	5,55		0,28	0,713	10,56		0,69
	0,0745	0,560	7,52		0,25	0,710	10,33		0,76
28	0,0508	0,043	0,85	3,51	0,18	0,082	1,61	9,10	0,46
	0,0564	0,045	0,80		0,19	0,204	3,62		0,51
	0,0630	0,165	2,67		0,22	0,282	4,48		0,57
	0,0675	0,262	2,99		0,24	0,737	10,91		0,62
	0,0745	0,365	4,90		0,26	0,888	11,91		0,68
≈ 0	0,0508	0,013	0,26	3,13	0,16	0,046	0,91	3,57	0,18
	0,0564	0,047	0,83		0,18	0,019	3,32		0,20
	0,0630	0,118	0,87		0,16	0,212	3,37		0,23
	0,0675	0,234	3,40		0,21	0,258	3,38		0,24
	0,0745	0,302	4,05		0,23	0,282	3,78		0,27

Зависимость B_0 от T представлена на рис.2. Здесь 1 – экспериментальная кривая; 2 – расчетная кривая, которую приближенно можно аппроксимировать степенным уравнением вида

$$B_{0\text{cp}} = B_0 T^k, \quad (10)$$

где k – показатель степени T кривой ($k = 4,25$).

Для максимального значения T величина $B_{0\text{cp}}$ максимальна, по мере уменьшения T значения $B_{0\text{cp}}$ снижаются и стремятся к нулю.

При определении n исходим из следующих соображений. Если твердость тел является твердой, то по решению Герца $n = 1,5$; если твердость мала, то $n \approx 1$.

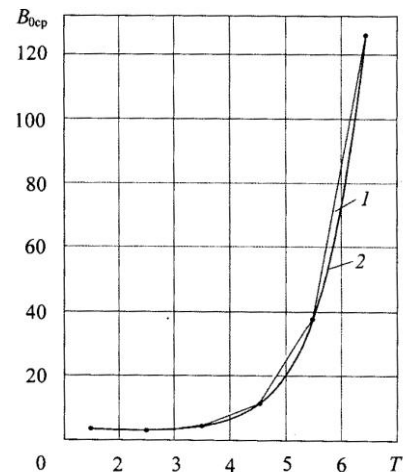


Рис. 2.

В общем случае имеем

$$1 \leq n \leq 1,5.$$

Разобьем этот диапазон изменения n на пропорциональные части и для каждого значения T найдем соответствующие значения n по формуле

$$n = 1 + \frac{T_i \Delta n}{T_0},$$

где T_0 – наибольшее значение T , $T_0 = 1,5$;

T_i – текущее значение T ;

Δn – расчетный интервал.

Расчетные значения B и n приведены в табл. 5.

Таблица 5

T , HRC	Нагрузка		Разгрузка	
	$B_{\text{ср}} \cdot 10^{-9}$, Па	n	$B_{\text{ср}} \cdot 10^{-9}$, Па	n_1
65	126,0	1,50	135,0	1,50
60	38,0	1,46	26,0	1,46
50	12,1	1,38	13,0	1,38
38	9,0	1,29	9,0	1,29
28	3,5	1,22	4,0	1,22
0	3,0	1,00	3,5	1,00

Таким образом, имея данные, приведенные в табл. 4, можно определить расчетные значения B . Используя зависимость $B(\rho)$, окончательно получим уравнение

$$B = (B_0 T)^k \rho, \quad (11)$$

с помощью которого можно рассчитать все остальные величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динник А.Н. Удар и сжатие твердых тел / А.Н. Динник // Избр. тр. Т. 1. – Киев: АН СССР, 1952. – С. 13–144.
2. Морозов С.И. Определение параметров силовой функции при сжатии и соударении упругопластичных тел / С.И. Морозов, Д.Н. Шостенко // Лесн. журн. – 2004. – № 3. – С. 25–31. – (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Шостенко Д.Н. Контактное сжатие и соударение двух упругопластичных тел: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Д.Н. Шостенко. – Архангельск, 2004. – 22 с.
4. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte / H. Hertz // Gesam. Werke. – Bd.1. – Leipzig, 1895.

Архангельский государственный
технический университет

Поступила 08.04.05

S.I. Morozov

Solving Tasks in Compression and Impact of Two Elasto-plastic Bodies

Method for solving tasks in contact compression and impact of two elasto-plastic bodies is provided. Design expressions for determining parameters of forcing function at loading and unloading stages of interacting bodies depending on their hardness are proposed.
