

УДК 624.04:627.418.2

А.С. Милев, М.М. Овчинников, А.И. Фурин

Милев Александр Сергеевич родился в 1936 г., окончил в 1959 г. Ленинградское высшее военное инженерно-техническое училище Военно-Морского Флота, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики С.-Петербургской лесотехнической академии. Имеет более 50 научных работ в области механики деформируемого твердого тела, механики силового взаимодействия конструкций с грунтом.



Овчинников Михаил Михайлович родился в 1930 г., окончил в 1954 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой водного транспорта леса и гидравлики С.-Петербургской лесотехнической академии, академик РАЕН. Имеет более 80 печатных работ в области совершенствования технологии водного транспорта леса, разработки перспективных экологически безопасных технологических схем водного транспорта леса на базе лесотранспортных и гидротехнических модулей, гидродинамики плотового лесосплава, расчета лесосплавных гидротехнических сооружений.



Фури́н Анатолий Иванович родился в 1944 г., окончил в 1970 г. Ленинградский политехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики С.-Петербургской лесотехнической академии. Имеет 25 печатных работ в области изучения прочности, трещиностойкости инженерных конструкций и сооружений.

**МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЗААНКЕРЕННЫХ ПОДПОРНЫХ СТЕНОК В СЛОИСТОМ ГРУНТЕ**

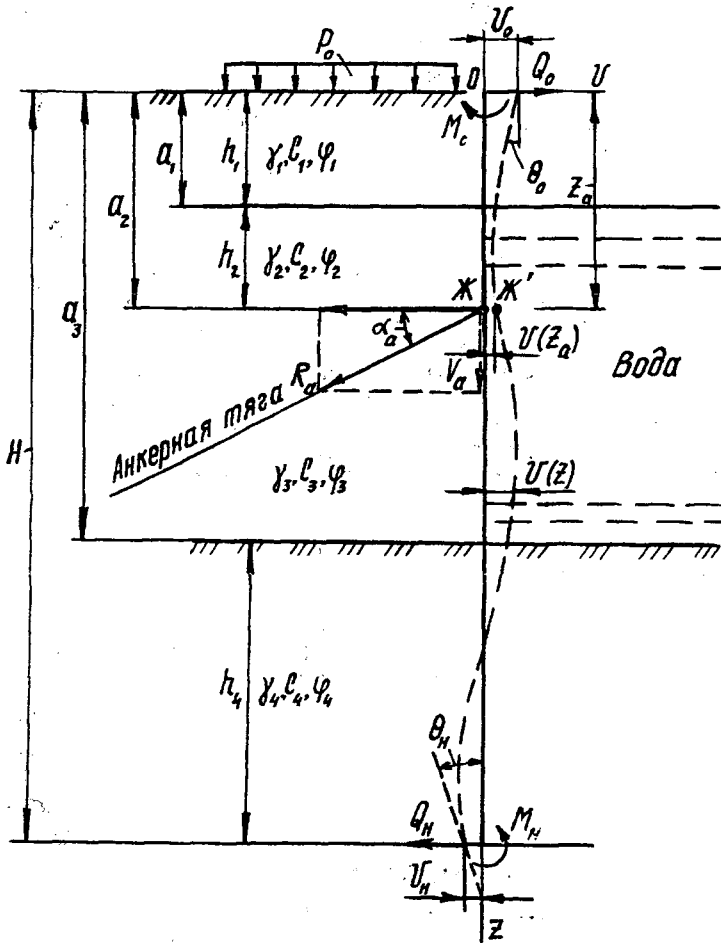
Представлено аналитическое решение задачи об изгибе подпорной стенки в слоистом упругом основании. Предложена схема алгоритма процедуры последовательных приближений для численного определения перемещений и усилий.

Гибкие (тонкие) подпорные стенки (больверки) широко применяют в качестве несущих конструкций гидротехнических сооружений лесных портов и береговых лесных складов, возводимых на мягких грунтах.

При расчете на прочность гибких заанкеренных подпорных стенок в настоящее время чаще всего используются графоаналитические методы [1, 2], не поддающиеся автоматизации.

В работе предлагаются аналитическое решение и схема алгоритма процедуры последовательных приближений для определения взаимосвязанных величин усилий в анкере и прогибов балки на неоднородном упругом основании, служащей расчетной схемой больверка, которые могут быть использованы для автоматизированных расчетов гибких заанкеренных шпунтовых стенок в слоистом основании.

1. Типичная расчетная схема представлена на рисунке.



Анкер, препятствуя перемещению точки $Ж$ балки, вызывает ее продольный изгиб при $z > z_a$. Усилие \bar{R}_a в анкере зависит от перемещения $v(z_a) \cos \alpha_a$ в точке $Ж$ и жесткости тяги $E_a A_a l_a$, где E_a , A_a , l_a – модуль упругости, площадь поперечного сечения и длина анкерной тяги.

Действие \bar{R}_a вызывает появление «скачков» продольной ΔN и поперечной ΔQ сил, а также изгибающего момента ΔM в сечении $z = z_a$ балки:

$$\Delta N = \bar{R}_a \sin \alpha_a; \quad \Delta Q = \bar{R}_a \cos \alpha_a; \quad \Delta M = e \bar{R}_a \sin \alpha_a. \quad (1)$$

«Скачок» продольной силы ΔN вызывает при $z > z_a$ дополнительный изгибающий момент $M_N(z)$:

$$M_N(z) = \bar{R}_a \sin \alpha_a (v(z) - v(z_a)). \quad (2)$$

Далее будем полагать, что $\bar{R}_a = R_a d$.

Давление σ_k грунта и воды в k -м слое без учета упругого отпора:

$$\sigma_k = \sigma_k^{\text{л}} - \sigma_k^{\text{п}} = P_0^{\text{л}} - P_0^{\text{п}} + \sum_{i=1}^{k-1} (\gamma_i^{\text{л}} \lambda_k^{\text{л}} - \gamma_i^{\text{п}} \lambda_k^{\text{п}}) h_i + (\gamma_k^{\text{л}} \lambda_k^{\text{л}} - \gamma_k^{\text{п}} \lambda_k^{\text{п}}) (z - \alpha_{k-1}), \quad (3)$$

где верхние индексы «л» и «п» означают, что соответствующий параметр относится к области слева и справа от оси OZ ;

$\lambda_k^{\text{л}}, \lambda_k^{\text{п}}$ – коэффициенты бокового давления грунта. В случае отсутствия грунта слева или справа от оси балки $\lambda_k^{\text{л}} = \lambda_k^{\text{п}} = 0$; для воды $\lambda_k^{\text{л}} = \lambda_k^{\text{п}} = 1$.

Упругий отпор грунта σ_k^r полагаем пропорциональным прогибу балки с коэффициентом постели k , численно равным давлению грунта: $k = \sigma_k$, но с размерностью $[k] = \text{сила/длина}^3$:

$$\sigma_k^r = -k v(z) = -\sigma_k v(z) / L_k, \quad (4)$$

где L_k – предельное упругое смещение оси сваи в рассматриваемом слое грунта.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на разных участках имеет вид:

$$\text{при } k = 0 \quad v^{IV} + \eta_k v^{\text{II}} = \beta_k + \delta_k (\bar{z} - \bar{a}_{k-1}); \quad (5)$$

$$\text{при } k \neq 0 \quad v^{IV} + \eta_k v^{\text{II}} + [\beta_k + \delta_k (\bar{z} - \bar{a}_{k-1})] v = 0, \quad (6)$$

где

$$\eta_k = \alpha^{-2} R_a \sin(\alpha_a) d / EI; \quad \beta_k = \alpha^{-4} \left[P_0^{\text{л}} - P_0^{\text{п}} + \sum_{i=1}^{k-1} (\gamma_i^{\text{л}} \lambda_k^{\text{л}} - \gamma_i^{\text{п}} \lambda_k^{\text{п}}) h_i \right] d / EI; \quad (7)$$

$$\delta_k = \alpha^{-5} (\gamma_k^{\text{л}} \lambda_k^{\text{л}} - \gamma_k^{\text{п}} \lambda_k^{\text{п}}) d / EI;$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\lambda_1 \gamma_1 / EI}; \quad [\alpha] = L^{-1}; \quad \bar{z} = \alpha z; \quad \bar{a} = \alpha a.$$

Краевые условия для балки при $\bar{z} = 0$ и $\bar{z} = \bar{H} = \alpha H$:

$$v(0) = v_0; \quad v^I(0) = \alpha^{-1} \theta_0; \quad v^{\text{II}}(0) = \alpha^{-2} M_0 / EI; \quad v^{\text{III}}(0) = \alpha^{-3} Q_0 / EI; \quad (8)$$

$$v(H) = v_H; \quad v^I(H) = \alpha^{-1} \theta_H; \quad v^{\text{II}}(H) = \alpha^{-2} M_H / EI; \quad v^{\text{III}}(H) = \alpha^{-3} Q_H / EI. \quad (9)$$

Черточки над безразмерными переменными в дальнейшем опускаем. Условия сопряжения параметров v, θ, M и Q на границах участков:

$$v_{k+1} = v_k; \quad \theta_{k+1} = \theta_k; \quad M_{k+1} = M_k + \Delta M_k; \quad Q_{k+1} = Q_k + \Delta Q_k, \quad (10)$$

где $\Delta M_k, \Delta Q_k$ – «скачки» изгибающего момента и поперечной силы на границе между k -м и $(k + 1)$ -м участками.

Условия сопряжения (10) при $z = a_k$ выражаются через перемещения:

$$v_{k+1} = v_k; \quad v_{k+1}^I = v_k^I; \quad v_{k+1}^{II} = v_k^{II} + \alpha^{-2} \Delta M_k / EI; \quad v_{k+1}^{III} = v_k^{III} + \alpha^{-3} \Delta Q_k / EI. \quad (11)$$

Поставленная задача свелась к дифференциальным уравнениям (5), (6) с разрывными коэффициентами, граничными условиями (8), (9) и условиями сопряжения (11) в точках разрыва решения.

2. Решение задачи на k -м участке ищем в виде отрезка ряда Тейлора. Используем условия сопряжения (11) на границе между k -м и $(k - 1)$ -м участками в виде:

$$v_k(a_{k-1}) = b_0; \quad v_k^I(a_{k-1}) = b_1; \quad v_k^{II}(a_{k-1}) = b_2; \quad v_k^{III}(a_{k-1}) = b_3,$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 – параметры, известные из решения задачи.

Для искомой функции $v(z)$ имеем (нижние пределы k и $k - 1$ опускаем):

$$v(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2/2! + b_3(z-a)^3/3! + v^{IV}(a)(z-a)^4/4! + \dots + v^n(a)(z-a)^n/n! + \dots \quad (12)$$

Коэффициенты $v^{IV}(a), v^V(a), \dots, v^n(a)$ выражаются через $b_i, i = 0, 1, 2, 3$:

$$v^n(a) = b_0 V_{n,0} + b_1 V_{n,1} + b_2 V_{n,2} + b_3 V_{n,3}, \quad (13)$$

где $V_{n,i}$ зависят только от β, δ, η ($n = 0, 1, 2, \dots, N; i = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} V_{0,0} &= 1; & V_{0,1} &= 0; & V_{0,2} &= 0; & V_{0,3} &= 0; \\ V_{1,0} &= 0; & V_{1,1} &= 1; & V_{1,2} &= 0; & V_{1,3} &= 0; \\ V_{2,0} &= 0; & V_{2,1} &= 0; & V_{2,2} &= 1; & V_{2,3} &= 0; \\ V_{3,0} &= 0; & V_{3,1} &= 0; & V_{3,2} &= 0; & V_{3,3} &= 1; \\ V_{4,0} &= -\beta; & V_{4,1} &= 0; & V_{4,2} &= -\eta; & V_{4,3} &= 0; \\ V_{5,0} &= -\delta; & V_{5,1} &= -\beta; & V_{5,2} &= 0; & V_{5,3} &= -\eta; \\ V_{6,0} &= \beta\eta; & V_{6,1} &= -2\delta; & V_{6,2} &= \eta^2 - \beta; & V_{6,3} &= 0; \\ V_{7,0} &= \delta\eta; & V_{7,1} &= \beta\eta; & V_{7,2} &= -3\delta; & V_{7,3} &= \eta^2 - \beta; \\ V_{8,0} &= -\beta(\eta^2 - \beta); & V_{8,1} &= 2\delta\eta; & V_{8,2} &= -\eta(\eta^2 - 2\beta); & V_{8,3} &= -4\delta; \\ V_{9,0} &= -\delta(\eta^2 - 6\beta); & V_{9,1} &= -\beta(\eta^2 - \beta); & V_{9,2} &= 8\delta\eta; & V_{9,3} &= -\eta(\eta^2 - 2\beta); \\ V_{10,0} &= \beta\eta^3 - 2\beta^2\eta + 6\delta^2; & V_{10,1} &= 2\delta(4\beta - \eta^2); & V_{10,2} &= \eta^4 - 3\beta\eta^2 + \beta^2; \\ V_{10,3} &= 10\delta\eta; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} V_{20,0} &= -\beta\eta^8 + 7\beta^2\eta^6 - 66\delta^2\eta^5 - 15\beta^3\eta^4 + 1220\delta^2\beta\eta^3 + 10\beta^4\eta^2 - \\ &\quad - 1340\delta^2\beta^2\eta + 1056\delta^4 - \beta^5; \\ V_{20,1} &= 2\delta\eta^7 78\delta\beta\eta^5 + 80\delta\beta\eta^4 + 240\delta\beta^2\eta^3 - 1480\delta^3\eta^2 - 140\delta\beta^3\eta + \\ &\quad + 1800\delta\beta^3; \\ V_{20,2} &= -\eta^9 + 8\beta\eta^7 - 21\beta^2\eta^5 + 1180\delta^2\eta^4 + 20\beta^3\eta^3 - 2380\delta^2\beta\eta^2 - 5\beta^4\eta + \\ &\quad + 480\delta^2\beta^2; \\ V_{20,3} &= -70\delta\eta^6 + 300\delta\beta\eta^4 - 300\delta\beta^2\eta^2 + 2840\delta^3\eta + 40\delta\beta^3. \end{aligned}$$

После подстановки (13) в (12) для отрезка ряда из $(N + 1)$ -го членов искомой функции $v(z)$ уравнения (6) и ее производных получаем:

$$\begin{aligned} v(z) &= b_0 \Phi_1^{(0)} + b_1 \Phi_2^{(0)} + b_2 \Phi_3^{(0)} + b_3 \Phi_4^{(0)}; \\ v^I(z) &= b_0 \Phi_1^{(1)} + b_1 \Phi_2^{(1)} + b_2 \Phi_3^{(1)} + b_3 \Phi_4^{(1)}; \\ v^{II}(z) &= b_0 \Phi_1^{(2)} + b_1 \Phi_2^{(2)} + b_2 \Phi_3^{(2)} + b_3 \Phi_4^{(2)}; \\ v^{III}(z) &= b_0 \Phi_1^{(3)} + b_1 \Phi_2^{(3)} + b_2 \Phi_3^{(3)} + b_3 \Phi_4^{(3)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(0)} &= \sum_{n=0}^N V_{n,0} \frac{z-a}{n!}; & \Phi_2^{(0)} &= \sum_{n=0}^N V_{n,1} \frac{z-a}{n!}; \\ \Phi_3^{(0)} &= \sum_{n=0}^N V_{n,2} \frac{(z-a)^n}{n!}; & \Phi_4^{(0)} &= \sum_{n=0}^N V_{n,3} \frac{(z-a)^n}{n!}; \\ \Phi_1^{(1)} &= \sum_{n=1}^N V_{n,0} \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}; & \Phi_2^{(1)} &= \sum_{n=1}^N V_{n,1} \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}; \\ \Phi_3^{(1)} &= \sum_{n=1}^N V_{n,2} \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}; & \Phi_4^{(1)} &= \sum_{n=1}^N V_{n,3} \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}; \\ \Phi_1^{(2)} &= \sum_{n=2}^N V_{n,0} \frac{z-a}{(n-2)!}; & \Phi_2^{(2)} &= \sum_{n=2}^N V_{n,1} \frac{z-a}{(n-2)!}; \\ \Phi_3^{(2)} &= \sum_{n=2}^N V_{n,2} \frac{(z-a)^{n-2}}{(n-2)!}; & \Phi_4^{(2)} &= \sum_{n=2}^N V_{n,3} \frac{(z-a)^{n-2}}{(n-2)!}; \\ \Phi_1^{(3)} &= \sum_{n=3}^N V_{n,0} \frac{(z-a)^{n-3}}{(n-3)!}; & \Phi_2^{(3)} &= \sum_{n=3}^N V_{n,1} \frac{(z-a)^{n-3}}{(n-3)!}; \\ \Phi_3^{(3)} &= \sum_{n=3}^N V_{n,2} \frac{(z-a)^{n-3}}{(n-3)!}; & \Phi_4^{(3)} &= \sum_{n=3}^N V_{n,3} \frac{(z-a)^{n-3}}{(n-3)!}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение уравнения (6) построено. Оно совпадает с решением, приведенным в [3], если при определении коэффициентов $V_{n,i}$ по формулам (14) принять $\eta = 0$, т. е. анкер отсутствует.

Решение уравнения (5) при $\eta_k \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} v(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(0)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(0)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(0)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(0)} + [\beta(z-a)^2 + \frac{1}{3} \delta(z-a)^3]/2\eta; \\ v^I(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(1)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(1)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(1)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(1)} + [\beta(z-a) + \frac{1}{2} \delta(z-a)^2]/\eta; \\ v^{II}(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(2)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(2)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(2)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(2)} + [\beta + \delta(z-a)]/\eta; \\ v^{III}(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(3)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(3)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(3)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(3)} + \delta/\eta, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\tilde{\Phi}_1^{(0)}, \tilde{\Phi}_2^{(0)}, \dots, \tilde{\Phi}_4^{(3)}$ – функции от z , определяемые по формулам (14), (16) при $\beta = 0, \delta = 0$.

Решение уравнения (5) при $\eta_k = 0$ также представлено в форме (17):

$$\begin{aligned} v(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(0)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(0)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(0)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(0)} + \beta \frac{(z-a)^4}{4!} + \delta \frac{(z-a)^5}{5!}; \\ v^I(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(1)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(1)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(1)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(1)} + \beta \frac{(z-a)^3}{3!} + \delta \frac{(z-a)^4}{4!}; \\ v^{II}(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(2)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(2)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(2)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(2)} + \beta \frac{(z-a)^2}{2!} + \delta \frac{(z-a)^3}{3!}; \\ v^{III}(z) &= b_0 \tilde{\Phi}_1^{(3)} + b_1 \tilde{\Phi}_2^{(3)} + b_2 \tilde{\Phi}_3^{(3)} + b_3 \tilde{\Phi}_4^{(3)} + \beta(z-a) + \delta \frac{(z-a)^2}{2!}, \end{aligned} \quad (18)$$

где функции $\tilde{\Phi}_1^{(0)}(z)$, $\tilde{\Phi}_2^{(0)}(z)$, ..., $\tilde{\Phi}_4^{(3)}(z)$ определены формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1^{(0)} &= 1; \quad \tilde{\Phi}_2^{(0)} = z - a; \quad \tilde{\Phi}_3^{(0)} = (z-a)^2/2; \quad \tilde{\Phi}_4^{(0)} = (z-a)^3/3!; \\ \tilde{\Phi}_k^{(i)}(z) &= d^i \tilde{\Phi}_k^{(0)} / dz^i, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (19)$$

Построенные решения (15), (17), (18) представляем в матричной форме. С этой целью обозначаем:

$$\bar{v}_k(z) = [v_k, v_k^I, v_k^{II}, v_k^{III}]^T; \quad (20)$$

$$\Delta \bar{v}_{k-1}(a_{k-1}) = \left[0, 0, \frac{\Delta M_{k-1}}{\alpha^2 EI}, \frac{\Delta Q_{k-1}}{\alpha^3 EI} \right]^T; \quad (21)$$

$$\Phi_{nk}^{(i)}(z) = \begin{cases} \Phi_{nk}^{(i)}(z), & \text{если } k \neq 0; \\ \tilde{\Phi}_{nk}^{(i)}(z), & \text{если } k = 0, \eta \neq 0; \\ \tilde{\tilde{\Phi}}_{nk}^{(i)}(z), & \text{если } k = 0, \eta = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3; n = 1, 2, 3); \end{cases} \quad (22)$$

$$\Phi_k(z) = \left\| \Phi_{nk}^{(i)}(z) \right\|_{4 \times 4}; \quad (23)$$

$$\bar{b}_{k-1} = [b_0, b_1, b_2, b_3]^T = [v_k, v_k^I, v_k^{II}, v_k^{III}]_{z=a_{k-1}}^T; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{k-1} &= [(\beta(z-a)^2 + \frac{1}{3}\delta(z-a)^3)/2\eta, (\beta(z-a) + \frac{1}{2}\delta(z-a)^2)/\eta, \\ &(\beta + \delta(z-a))/\eta, \delta/\eta]^T; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\bar{g}_k(z) = \left[\delta \frac{(z-a)^5}{5!} + \beta \frac{(z-a)^4}{4!}, \delta \frac{(z-a)^4}{4!} + \beta \frac{(z-a)^3}{3!}, \delta \frac{(z-a)^3}{3!} + \beta \frac{(z-a)^2}{2!}, \right. \\ \left. \delta \frac{(z-a)^2}{2!} + \beta(z-a) \right]^T, \quad (26)$$

где верхний индекс «т» означает транспортирование, нижний индекс «k» указывает на принадлежность k-му участку интегрирования.

В принятых обозначениях решение задачи имеет вид

$$\bar{v}_k(z) = \Phi_k(z) [\bar{b}_{k-1} + \Delta \bar{v}_{k-1}(a_{k-1})] + \tilde{v}_k(z), \quad (27)$$

где $\tilde{v}(z)$ – вектор-функция, определяемая по формуле

$$\tilde{v}_k(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq 0; \\ \bar{f}_k(z), & \text{если } k = 0, \eta \neq 0; \\ \bar{g}_k(z), & \text{если } k = 0, \eta = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Таким образом, если известны $\bar{v}_{k-1}, \Delta \bar{v}_{k-1}$ при $z = a_{k-1}$ в начале k-го участка, то решение на этом участке получается по формулам (27), (28).

3. Примем, что имеется k_* участков интегрирования уравнений (5), (6) ($k = 1, 2, \dots, k_*$) и при $z = 0$ известны M_0, Q_0 , а при $z = H - M_H, Q_H$.

Допустим вначале, что анкеры отсутствуют. Тогда решение строится следующим образом. Поскольку $R_a = 0$, то $\Delta M = 0, \Delta Q = 0, \Delta \bar{v} = 0$. Решение задачи (27) на k-м участке принимает вид

$$\bar{v}_k(z) = \left\| \Phi_{nk}^{(i)}(z) \right\| \bar{b}_{k-1} + \tilde{v}_k(z), \quad (29)$$

где

$$\Phi_{nk}^{(i)}(z) = \begin{cases} \Phi_{nk}^{(i)}(z), \\ \tilde{\Phi}_{nk}^{(i)}(z), \end{cases} \quad \tilde{v}_k(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq 0; \\ \tilde{q}_k(z), & \text{если } k = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Используя условия сопряжения (10) и решение (29), получаем:

$$\bar{v}_1(0, \dots, v_0, \theta_0); \bar{v}_2(a_2, \dots, v_0, \theta_0); \dots; \bar{v}_k(a_k, \dots, v_0, \theta_0); \dots; \bar{v}_{k_*}(H, \dots, v_0, \theta_0).$$

В силу краевых условий (8), (9) имеем

$$v_{k_*}(H, \dots, v_0, \theta_0) = v_H; \quad v_{k_*}^I(H, \dots, v_0, \theta_0) = \theta_H / \alpha; \quad (31)$$

$$v_{k_*}^{II}(H, \dots, v_0, \theta_0) = M_H / (\alpha^2 EI); \quad v_{k_*}^{III}(H, \dots, v_0, \theta_0) = Q_H / (\alpha^2 EI). \quad (32)$$

Из системы линейных уравнений (32) можно определить v_0, θ_0 :

$$v_0 = v_0(M_0, Q_0, M_H, Q_H \dots); \quad \theta_0 = \theta_0(M_0, Q_0, M_H, Q_H \dots), \quad (33)$$

а из уравнений (45) – v_H, θ_H . В отсутствие анкеров задача решена.

Пусть в точке $z_a = a_{k-1}$ к балке присоединен анкер. Возьмем какое-либо малое число δ и построим процедуру последовательных приближений.

3.1. Полагаем $R_a^{(0)} = 0$; тогда, согласно (1), (7) $\Delta M_k^{(0)} = 0$, $\Delta Q_k^{(0)} = 0$, $\eta_k = 0$; определяем по (14), (16) $\Phi_k(z)$ при $\eta = 0$; пользуясь решениями (18), (19) и условиями сопряжения (11), последовательно находим $\bar{v}_1(0, v_0, \theta_0)$; $\bar{v}_2(a_2, v_0, \theta_0), \dots, \bar{v}_k(a_k, v_0, \theta_0)$, строим систему алгебраических уравнений и определяем значения начальных параметров $v_0^{(0)}, \theta_0^{(0)}, v_H^{(0)}, \theta_H^{(0)}$.

3.2. Зная начальные параметры $v_0^{(0)}, \theta_0^{(0)}, v_H^{(0)}, \theta_H^{(0)}$ и применяя решения (18), (19), находим прогиб $v(z_a)$ балки в точке присоединения анкера; вычисляем $R_a^{(1)}, \Delta M_k^{(1)}, \Delta Q_k^{(1)}, \eta_k^{(1)}$; по формулам (14), (16) находим $\Phi_k^{(1)}(z)$ при $\eta = \eta_k^{(1)}$.

3.3. На j -м «шаге» приближения положим $R_a^{(j)} = R_a^{(j-1)}$ и по выражениям (29)–(33) найдем параметры $v_0^{(j)}, \theta_0^{(j)}, v_H^{(j)}, \theta_H^{(j)}$; присоединив к ним известные из краевых условий (8), (9) значения M_0, Q_0, M_H, Q_H , построим векторы начальных параметров $\bar{b}_0^{(j)}, \bar{b}_H^{(j)}$:

$$\bar{b}_0^{(j)} = [v_0^{(j)}, \theta_0^{(j)} / \alpha, M_0 / (\alpha^2 EI), Q_0 / (\alpha^3 EI)]^T; \quad (34)$$

$$\bar{b}_H^{(j)} = [v_H^{(j)}, \theta_H^{(j)} / \alpha, M_H / (\alpha^2 EI), Q_H / (\alpha^3 EI)]^T. \quad (35)$$

3.4. Зная $\bar{b}_0^{(j)}$, по выражениям (29), (30) находим перемещение $v^{(j)}(a_{k-1})$ точки $z = a_{k-1}$, в которой к балке присоединен анкер; вычисляем $R_a^{(j)}, \Delta M^{(j)}, \Delta Q^{(j)}$ и строим вектор $\Delta \bar{v}_{k-1}^{(j)}(a_{k-1})$.

3.5. При известном $\Delta \bar{v}_{k-1}^{(j)}(a_{k-1})$ с помощью выражений (22)–(28) определяем параметры $v_0^{(j+1)}, \theta_0^{(j+1)}, v_H^{(j+1)}, \theta_H^{(j+1)}$ так, как это описано в п. 3.1 для случая $R_a = 0$; по аналогии с (34), (35) строим векторы $\bar{b}_0^{(j+1)}, \bar{b}_H^{(j+1)}$.

3.6. Используя формулы (22)–(28), найдем перемещение $v^{(j+1)}(a_{k-1})$ в точке $z = a_{k-1}$ и усилие в анкере $R_a^{(j+1)}$ на $(j+1)$ -м «шаге» приближения; сравним между собой $v^{(j)}(a_{k-1})$ и $v^{(j+1)}(a_{k-1})$, $R_a^{(j)}$ и $R_a^{(j+1)}$, $\bar{b}_0^{(j)}$ и $\bar{b}_0^{(j+1)}$, $\bar{b}_H^{(j)}$ и $\bar{b}_H^{(j+1)}$ по какой-либо норме и потребуем, чтобы

$$\frac{|v^{(j)}(a_{k-1})|}{|v^{(j+1)}(a_{k-1})|} + \frac{|\bar{R}_a^{(j)}|}{|\bar{R}_a^{(j+1)}|} + \frac{|\bar{b}_0^{(j)}|}{|\bar{b}_0^{(j+1)}|} + \frac{|\bar{b}_H^{(j)}|}{|\bar{b}_H^{(j+1)}|} = 4 \pm \delta,$$

где вертикальными черточками обозначена норма величины.

Если последнее условие выполнено, то процедуру последовательных приближений можно закончить; если не выполнено, то перейти к п. 3.3.

Сходимость описанной процедуры последовательных приближений обеспечена, если балка и анкер деформируются в пределах упругости. В

случае появления «пластических» шарниров в анкере или балке необходимо увеличивать в расчетах размеры поперечных сечений последних.

Таким образом, в нашей работе, по-видимому, впервые представлено приближенное аналитическое решение задачи об изгибе заанкеренной гибкой подпорной стенки в слоистом упругом основании и предложена схема алгоритма процедуры последовательных приближений для определения взаимосвязанных величин усилия в анкере и прогибов стенки.

Полученные результаты могут быть использованы для полной автоматизации процессов расчета на прочность тонких заанкеренных стенок причальных и оградительных сооружений лесных портов и береговых лесных складов, а также береговых заанкеренных свайных опор лесозадерживающих сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будин А.Я. Тонкие подпорные стенки для условий Севера. – Л.: Стройиздат, 1982. – 288 с.
2. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с.
3. Мильев А.С., Овчинников М.М. Расчет на прочность гибких шпунтовых стенок лесосплавных гидротехнических сооружений в слоистом грунте // Лесн. журн. – 1995. – № 6. – С. 38–48. – (Изв. высш. учеб. заведений).

С.-Петербургская лесотехническая академия
Поступила 14. 01. 97

A.S. Milyaev, M.M. Ovchinnikov, A.I. Furin

Calculation of Anchored Flexible Retaining Walls in the Layered Soil

The analytical solution of the problem on bending the retaining wall in the layered flexible basement is presented. The algorithm scheme is suggested for the procedure of progressive approximations for numerical determination of displacement and forcing.
