

Тогда относительное искривление определяется следующим диапазоном:

верхний предел

$$\frac{B_0^B}{R-r} = \frac{\sqrt{3}}{1-d_0/D_0} \left( \frac{1}{\sin \beta} + \operatorname{tg} \alpha_2 \right); \quad (9)$$

нижний предел

$$\frac{B_0^H}{R-r} = \frac{\sqrt{3}}{1-d_0/D_0} \operatorname{ctg} \beta, \quad (10)$$

где  $d_0 = 2r$ ;  
 $D_0 = 2R$ .

Траектории перемещения очага деформации получали с помощью метода координатных сеток. За неподвижный центр при построении полей принимали центр торца комлевого конца бревна. Анализ макроперемещений объема древесины проводили по результатам измерений положений координатной ячейки до и после эксперимента с выдержкой брусев до установившейся влажности. Влажность исходного бревна принимали для условий свежесрубленной древесины.

Деформируемость брусев зависит от геометрических размеров бревна и толщины формируемых брусев (от ширины формируемых плоскостей), а также от ориентации оси предмета обработки по поставу инструмента лесопильного станка. С увеличением угла раствора направляющих при переориентировании бревна с осевого направления к образующей уменьшается и степень изменения формы бруса. Абсолютное значение  $\omega$  в зависимости от угла раствора направляющих не превосходит 10...15%.

В поле макроперемещений можно выделить две зоны, определяемые взаимным положением формируемых плоскостей и находящиеся в двух координатных плоскостях. Задача состоит в определении значения вектора деформации. Теоретическое определение граничных условий деформирования пиломатериалов и уточнение основных параметров при экспериментальной оценке позволят подойти к разработке технологических требований по ограничению способности пиломатериалов к деформированию.

Поступила 28 января 1994 г.

УДК 674.053 : 621.934

С. В. ЕРШОВ

ЦНИИМОД

### О ДВУХ ПОДХОДАХ

### В РАСЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПИЛЫ

Рассмотрены два подхода к теоретическому исследованию колебаний вращающегося диска пилы, основанные на использовании как вращающейся вместе с диском, так и неподвижной системы координат. Показаны преимущества использования неподвижной системы.

Two approaches to the study of a rotary saw disk oscillations based on the use of a coordinate system, both rotating with a disk and a fixed one, have been considered. The advantages of using the fixed system have been revealed.

В настоящее время при расчете колебаний вращающегося диска пилы большое распространение получила теория критических частот

вращения [2, 4]. Она позволяет предсказывать частоты вращения, соответствующие потере пилой динамической устойчивости. Однако традиционно используемый этой теорией подход не позволяет вычислять изгибную жесткость вращающегося диска, учитывать влияние направляющих на изгибную жесткость и критические частоты вращения, так как основан на применении системы координат, вращающейся вместе с пилой. Данная статья посвящена систематизации и дальнейшему развитию теоретических представлений о колебаниях вращающегося диска пилы.

Современные теоретические представления о колебаниях круглых пил основаны на вариационном принципе Остроградского — Гамильтона, согласно которому действительное движение системы выделяется из всех допустимых тем, что удовлетворяет условию экстремума интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt, \quad (1)$$

где  $T$ ,  $U$  — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы при заданных ее положениях в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ .

При традиционном подходе диск пилы рассматривают в координатах, вращающихся вместе с ним. Кинетическая энергия будет равна энергии колебаний:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_{r_0}^R \int_0^{2\pi} (d\omega/dt)^2 r dr d\varphi; \quad (2)$$

потенциальная энергия — энергии деформации диска:

$$U = \frac{1}{2} D \int_{r_0}^R \int_0^{2\pi} \left\{ (\nabla \omega)^2 - 2(1 - \mu) \left[ \left( \frac{1}{r} \omega_r + \frac{1}{r^2} \omega_{\varphi\varphi} \right) \omega_{rr} - \left( \frac{1}{r} \omega_{\varphi} \right)^2 \right] \right\} r dr d\varphi + \frac{1}{2} h \int_{r_0}^R \int_0^{2\pi} \left[ \sigma_r \omega_r^2 + \sigma_{\varphi} \left( \frac{\omega_{\varphi}}{r} \right)^2 \right] r dr d\varphi - P \omega_p, \quad (3)$$

- где  $\rho$  — плотность материала пилы;  
 $h$  — толщина пилы;  
 $r_0$  — радиус зажимных шайб;  
 $R$  — внешний радиус диска пилы;  
 $\omega$  — прогиб пилы;  
 $r, \varphi$  — полярные координаты;  
 $D$  — цилиндрическая жесткость,  $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ ;  
 $E$  — модуль упругости;  
 $\mu$  — коэффициент Пуассона;  
 $\nabla \omega$  — оператор Лапласа,  $\nabla \omega = \omega_{rr} + \frac{1}{r} \omega_r + \frac{1}{r^2} \omega_{\varphi\varphi}$ ;  
 $\sigma_r, \sigma_{\varphi}$  — соответственно радиальные и окружные напряжения в пиле;  
 $\omega_p$  — прогиб диска пилы в точке  $(r_p, \varphi_p)$  приложения внешней силы  $P$ .

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_{\varphi}$  равны сумме начальных напряжений, напряжений от неравномерного нагрева диска пилы и от центробежных сил инерции, которые пропорциональны второй степени частоты вращения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^H + \sigma_r^t + \sigma_r^{\omega} = \sigma_r^H + \sigma_r^t + \omega^2 R(r); \\ \sigma_{\varphi} &= \sigma_{\varphi}^H + \sigma_{\varphi}^t + \sigma_{\varphi}^{\omega} = \sigma_{\varphi}^H + \sigma_{\varphi}^t + \omega^2 \Phi(r), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $R(r)$ ,  $\Phi(r)$  — функции от  $r$ .

Прогиб диска представлен суммой  $(2n + 1)$  координатных функций, описывающих все допустимые движения пилы [2]:

$$\omega = \frac{1}{2} a_0 u_0(r) \cos p_0 t + \sum_{\lambda=1}^n u_\lambda(r) (a_\lambda \cos \lambda \varphi + b_\lambda \sin \lambda \varphi) \cos p_\lambda t, \quad (5)$$

где  $a_\lambda, b_\lambda$  — неопределенные коэффициенты;

$u_\lambda$  — функция только от радиуса  $r$ , удовлетворяющая всем граничным условиям;

$\lambda$  — число узловых диаметров в форме колебаний;

$p_\lambda$  — круговая частота колебаний в связанной с пилой системе координат по форме с  $\lambda$  узловыми диаметрами.

Подставляя выражение (5) в интеграл (1) и выполняя условие экстремума  $\left(\frac{dI}{da_\lambda} = 0; \frac{dI}{db_\lambda} = 0\right)$ , получаем  $(2n + 1)$  уравнений относительно коэффициентов  $a_\lambda$  и  $b_\lambda$ :

$$\begin{aligned} a_\lambda (H_\lambda + \omega^2 Q_\lambda + Z_\lambda - p_\lambda^2 Y_\lambda) &= P u_\lambda(r_p) \cos \lambda \varphi_p; \\ b_\lambda (H_\lambda + \omega^2 Q_\lambda + Z_\lambda - p_\lambda^2 Y_\lambda) &= P u_\lambda(r_p) \sin \lambda \varphi_p; \\ \lambda &= 0, 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $H_\lambda = \pi D \int_{r_0}^R \left( \frac{d^2 u_\lambda}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\lambda}{dr} - \frac{\lambda^2}{r^2} u_\lambda \right)^2 r dr;$

$$Q_\lambda = \pi h \int_{r_0}^R \left[ R(r) \left( \frac{du_\lambda}{dr} \right)^2 + \Phi(r) \left( \lambda \frac{u_\lambda}{r} \right)^2 \right] r dr;$$

$$Z_\lambda = \pi h \int_{r_0}^R \left[ (\sigma_r^n + \sigma_r^t) \left( \frac{du_\lambda}{dr} \right)^2 + (\sigma_\varphi^n + \sigma_\varphi^t) \left( \lambda \frac{u_\lambda}{r} \right)^2 \right] r dr;$$

$$Y_\lambda = \rho h \pi \int_{r_0}^R u_\lambda^2 r dr.$$

При отсутствии внешней силы  $P$  уравнения (6) могут иметь решение только в том случае, когда

$$p_\lambda^2 = (H_\lambda + \omega^2 Q_\lambda + Z_\lambda) / Y_\lambda, \quad (7)$$

что соответствует частотам собственных колебаний вращающегося диска пилы в связанной с ним системе координат. При  $\omega = 0$  имеем частоты колебаний невращающегося диска

$$p_{\lambda ст}^2 = (H_\lambda + Z_\lambda) / Y_\lambda. \quad (8)$$

Используя формулу (8), запишем

$$p_\lambda^2 = p_{\lambda ст}^2 + \omega^2 B, \quad (9)$$

где  $B$  — динамический коэффициент,  $B = Q_\lambda / Y_\lambda$ .

Напряжения от центробежных сил инерции положительны, поэтому  $B > 0$  и увеличение частоты вращения диска в связанной с ним системе координат приводит к увеличению частот его собственных колебаний.

Для перехода к неподвижной системе координат прибегают к искусственному приему: колебания разделяют на две цепи волн, бегущих в различных направлениях с угловой скоростью  $\omega_{1,2} = p_\lambda / \lambda$ . Для неподвижного наблюдателя частоты вращения этих волн и соответствующие им частоты колебаний будут различны:

$$\omega_1 = p_\lambda/\lambda + \omega; \quad \omega_2 = p_\lambda/\lambda - \omega, \quad (10)$$

$$q_1 = p_\lambda + \omega\lambda; \quad q_2 = p_\lambda - \omega\lambda, \quad (11)$$

где  $q$  — частоты колебаний в неподвижной системе координат.

При кратности одной из частот колебаний частоте вращения  $q_{1,2\lambda} = k\omega$  ( $k$  — коэффициент кратности) возникают резонансные частоты вращения  $\omega_{\text{рез}} = p_\lambda/(k \pm \lambda)$ . С учетом (9) запишем

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{P_{\lambda\text{ст}}^2}{(k \pm \lambda)^2 - B}}. \quad (12)$$

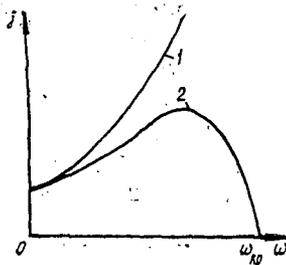
Значению  $k = 0$  соответствует критическая частота вращения

$$\omega_{\text{кр}} = p_\lambda/\lambda = \sqrt{\frac{P_{\lambda\text{ст}}^2}{\lambda^2 - B}}, \quad (13)$$

при которой волна колебаний останавливается в пространстве для неподвижного наблюдателя ( $q_2 = 0$ ).

Если к диску пилы в связанной с ним системе координат приложена постоянная сила  $P$ , то уравнения (6) позволяют определять коэффициенты  $a_\lambda$  и  $b_\lambda$ , а (5) — прогиб пилы в точке приложения силы ( $r_p, \varphi_p$ ). Однако изгибная жесткость диска пилы, найденная по формуле  $j = P/\omega_p$ , в этой системе координат не может служить показателем его работоспособности. С увеличением частоты вращения она непрерывно возрастает и не отражает потерю диском динамической устойчивости при критических частотах вращения [3]. На рис. 1 приведена зависимость изгибной жесткости пилы от частоты ее вращения. Начальное напряженное состояние пилы до зажатия в шайбы близко к критическому.

Рис. 1. Влияние частоты вращения на изгибную жесткость вращающейся пилы: 1 — система координат, вращающаяся вместе с пилой; 2 — неподвижная система координат



Обратимся к другому подходу, основанному на использовании неподвижной в пространстве системы координат  $(r, \psi)$ , где  $\psi = \psi + \omega t$ . Выражение (3) для потенциальной энергии не изменится, а кинетическая энергия будет равна сумме энергии колебаний и энергии вращения:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_{r_0}^R \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 + \omega^2 r^2 \right] r dr d\varphi. \quad (14)$$

Прогиб пилы  $w(r, \psi, t)$  зависит от времени непосредственно и через координату  $\psi$ :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \omega \frac{\partial w}{\partial \psi}. \quad (15)$$

Для того чтобы функция прогиба  $w(r, \psi, t)$  описывала все допустимые движения в неподвижной системе координат, ее необходимо представить в виде  $2(2n + 1)$  координатных функций:

$$\omega = \frac{1}{2} u_0(r) (a_0 \cos q_0 t + b_0 \sin q_0 t) + \sum_{\lambda=1}^n u_{\lambda}(r) (a_{\lambda} \cos \lambda \psi \cos q_{\lambda} t + b_{\lambda} \cos \lambda \psi \sin q_{\lambda} t + c_{\lambda} \sin \lambda \psi \cos q_{\lambda} t + d_{\lambda} \sin \lambda \psi \sin q_{\lambda} t), \quad (16)$$

где  $a_{\lambda}, b_{\lambda}, c_{\lambda}, d_{\lambda}$  — неопределенные коэффициенты.

С учетом (14) — (16) и при  $P = 0$  условия экстремума интеграла (1) примут вид

$$\begin{aligned} a_{\lambda} A_{\lambda} - d_{\lambda} B_{\lambda} &= 0; \\ b_{\lambda} A_{\lambda} + c_{\lambda} B_{\lambda} &= 0; \\ c_{\lambda} A_{\lambda} + b_{\lambda} B_{\lambda} &= 0; \\ a_{\lambda} A_{\lambda} - a_{\lambda} B_{\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{Здесь } B_{\lambda} = 2q_{\lambda} \omega \lambda Y_{\lambda}; \quad A_{\lambda} = H_{\lambda} + Z_{\lambda} + \omega^2 Q_{\lambda} - \omega^2 \lambda^2 Y_{\lambda} - q_{\lambda}^2 Y_{\lambda}. \quad (18)$$

Уравнения (17) могут иметь решение только в том случае, когда

$$A_{\lambda}^2 - B_{\lambda}^2 = 0$$

или

$$p_{\lambda \text{ст}}^2 + \omega^2 B - \omega^2 \lambda^2 - q_{\lambda}^2 \pm 2q_{\lambda} \omega = 0, \quad (19)$$

что соответствует

$$q_{\lambda} = \sqrt{p_{\lambda \text{ст}}^2 + \omega^2 B} \pm \omega \lambda.$$

или частотам вперед и назад бегущих волн по формуле (11). При кратности частоты колебаний и частоты вращения  $q_{\lambda} = k \omega$  получим резонансные частоты вращения, соответствующие формуле (12).

Приложим к пиле периодическую силу  $P \sin(ft + \delta)$  (где  $f$  — частота приложения силы;  $\delta$  — начальная фаза) и найдем решение в форме вынужденных колебаний, для чего в формуле (16) заменим  $q_{\lambda}$  на  $f$ . В результате этого будем иметь систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_{\lambda} A_{\lambda} - d_{\lambda} B_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) \sin \delta \cos \lambda \psi_p; \\ b_{\lambda} A_{\lambda} + c_{\lambda} B_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) \cos \delta \cos \lambda \psi_p; \\ c_{\lambda} A_{\lambda} + b_{\lambda} B_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) \sin \delta \sin \lambda \psi_p; \\ d_{\lambda} A_{\lambda} - a_{\lambda} B_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) \cos \delta \cos \lambda \psi_p. \end{aligned} \quad (20)$$

Заменив в формулах (19)  $q_{\lambda}$  на  $f$  и решив уравнение (20), получим

$$\begin{aligned} a_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) (A_{\lambda} \sin \delta \cos \lambda \psi_p + B_{\lambda} \cos \delta \sin \lambda \psi_p) / (A_{\lambda}^2 - B_{\lambda}^2); \\ b_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) (A_{\lambda} \cos \delta \cos \lambda \psi_p - B_{\lambda} \sin \delta \sin \lambda \psi_p) / (A_{\lambda}^2 - B_{\lambda}^2); \\ c_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) (A_{\lambda} \sin \delta \sin \lambda \psi_p - B_{\lambda} \cos \delta \cos \lambda \psi_p) / (A_{\lambda}^2 - B_{\lambda}^2); \\ d_{\lambda} &= P u_{\lambda}(r_p) (A_{\lambda} \cos \delta \sin \lambda \psi_p + B_{\lambda} \sin \delta \cos \lambda \psi_p) / (A_{\lambda}^2 - B_{\lambda}^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставим выражения для коэффициентов (21) в формулу (16):

$$w(r, \psi, t) = \frac{Pu_0(r_p)u_0(r)}{2A_0} \sin(ft + \delta) + \sum_{\lambda=1}^n \frac{Pu(r_p)u_\lambda(r)}{A_\lambda^2 - B_\lambda^2} \{A_\lambda \cos[\lambda(\psi - \psi_p) \sin(ft + \delta)] + B_\lambda \sin[\lambda(\psi - \psi_p) \cos(ft + \delta)]\}. \quad (22)$$

Упростим формулу (22), положив  $\psi_p = 0$  и  $\delta = 0$ , что не изменит результата. После преобразований получим

$$w(r, \psi, t) = \frac{1}{2A_0} Pu_0(r_p)u_0(r) \sin ft + P \sum_{\lambda=1}^n u_\lambda(r_p)u_\lambda(r) \left[ \frac{\cos \lambda \psi \sin ft}{A_\lambda + B_\lambda} + \frac{B \operatorname{sh}(\lambda \psi + ft)}{A_\lambda^2 - B_\lambda^2} \right]. \quad (23)$$

Полученное выражение показывает, что при возбуждении вращающегося диска пилы периодической силой его колебания по каждой из форм в неподвижной системе координат можно представить суммой двух составляющих. Первая имеет неподвижные узловые диаметры и одну из зон пучностей, расположенную в точке приложения силы, вторая — узловые диаметры, вращающиеся в направлении вращения пилы с угловой частотой  $f/\lambda$ . При приближении частоты вращения к частоте одной из вперед или назад бегущих волн ( $A_\lambda^2 - B_\lambda^2 \rightarrow 0$ ) амплитуда второй составляющей неограниченно возрастает. Амплитуда первой составляющей неограниченно возрастает только при  $A_\lambda + B_\lambda \rightarrow 0$ , то есть при частотах возбуждения, соответствующих частотам вперед ( $f = \omega\lambda + \sqrt{P_{\lambda \text{ ст}}^2 + \omega^2 B}$  при  $\omega < f/\lambda$ ) и назад ( $f = -\omega\lambda + \sqrt{P_{\lambda \text{ ст}}^2 + \omega^2 B}$  при  $\omega > f/\lambda$ ) бегущих волн.

Если к вращающемуся диску пилы приложим постоянную силу ( $\delta = \pi/2, f = 0$ ), то получим

$$w(r, \psi) = \frac{Pu_0(r_p)u_0(r)}{2A_0} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{Pu_\lambda(r_p)u_\lambda(r)}{A_\lambda} \cos[\lambda(\psi - \psi_p)]. \quad (24)$$

Согласно этой формуле при  $P = \text{const}$   $w$  не зависит от времени, поэтому при приложении к вращающейся пиле постоянной силы для неподвижного наблюдателя форма колебаний пилы неподвижна, а наибольшую деформацию пила будет иметь в точке приложения этой силы. При критических частотах вращения, найденных по формуле (13), деформация пилы неограниченно возрастает, что соответствует потере динамической устойчивости. Следовательно, изгибная жесткость вращающейся пилы, определенная в неподвижной системе координат, при критических частотах вращения теоретически уменьшается до нуля. Это демонстрирует приведенная на рис. 1 зависимость изгибной жесткости пилы от частоты вращения в неподвижной системе координат (кривая 2).

Использование неподвижной в пространстве системы координат позволяет учесть взаимодействие вращающейся пилы и направляющей, если считать последнюю зоной упругого защемления [1]. Для этого к выражению для определения потенциальной энергии (3) необходимо добавить потенциальную энергию деформации упругого слоя направляющих (например слоя смазки):

$$\frac{k_c}{2} \int_{F_H} w^2 dF, \quad (25)$$

где  $k_c$  — коэффициент жесткости упругого слоя;  
 $F_n$  — площадь направляющей.

Система уравнений (17) с учетом (25) дает две группы решений. Критическим частотам вращения пилы из первой группы соответствуют симметричные формы динамической потери устойчивости

$$\omega_\lambda = \frac{u_0}{2} a_0 + \sum_{\lambda=1}^n a_\lambda u_\lambda(r) \cos \lambda \psi, \quad (26)$$

а частотам вращения из второй группы — антисимметричные формы

$$\omega_\lambda = \sum_{\lambda=1}^n b_\lambda u_\lambda(r) \sin \lambda \psi. \quad (27)$$

Зависимость критических частот вращения пилы от углового размера направляющих приведена на рис. 2.

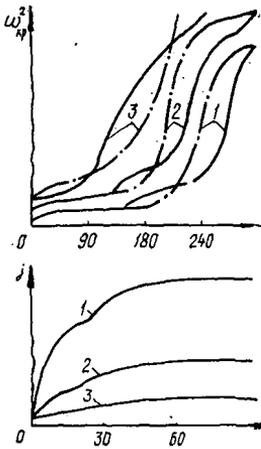


Рис. 2. Влияние углового размера направляющих на критические частоты вращения  $\omega$  круглой пилы при различных значениях  $\lambda$ : 1 —  $\lambda = 2$ ; 2 — 3; 3 — 4 (сплошная линия — симметричные формы; штрихпунктирная — асимметричные)

Рис. 3. Влияние углового размера направляющих на изгибную жесткость пилы  $j$  при различном угловом расстоянии от края направляющей: 1 —  $\alpha = 15^\circ$ ; 2 —  $30^\circ$ ; 3 —  $45^\circ$

Аналогичным образом можно учесть влияние направляющих и на изгибную жесткость пилы. На рис. 3 представлена зависимость изгибной жесткости вращающейся пилы от углового размера направляющих.

### Выводы

1. Традиционно используемая в теоретических исследованиях круглых пил вращающаяся вместе с пилой система координат позволяет определять только критические и резонансные частоты их вращения.
2. Использование неподвижной в пространстве системы координат дает возможность дополнительно определить изгибную жесткость вращающейся пилы и амплитуду ее колебаний при действии периодических сил, а также учитывать влияние направляющих.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Ершов С. В. Влияние размеров направляющих на критическую частоту вращения круглых пил и возможность увеличения скорости резания // Проблемы интенсификации лесопильного производства: Науч. тр. / ЦНИИМОД. — 1985. — С. 151—160. [2]. Жодзишский Г. А. Влияние начальных напряжений от проковки и неравномерного нагрева на частоты свободных колебаний вращающихся круглых пил // Науч. тр. — Л.: ЛТА, 1959. — Вып. 83. — С. 238—253. [3]. Стахийев Ю. М., Ершов С. В., Макаров В. В. О согласовании степени проковки (вальцевания) с частотой вращения круглой пилы // Лесн. журн. — 1988. — № 6. — С. 59—64. (Изв. высш. учеб. заведений). [4]. Стахийев Ю. М. Устойчивость и колебания плоских круглых пил. — М.: Лесн. пром-сть, 1977. — 296 с.