

УДК 674.5

***В.В. Сергеевичев***

Сергеевичев Владимир Васильевич родился в 1947 г., окончил в 1972 г. Ленинградскую лесотехническую академию, кандидат технических наук, доцент кафедры теории механизмов, деталей машин и подъемно-транспортных устройств С.-Петербургской лесотехнической академии. Имеет более 30 печатных трудов в области технологии и механики древесных материалов.

**АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ФАНЕРНЫХ ТРУБ**

Выполнено решение задачи о напряженном состоянии стенок фанерных труб при равномерном распределении влаги по их толщине.

фанерные трубы, напряженное состояние, анализ напряженного состояния, градиент влажности.

Древесные материалы, адсорбируя жидкости, изменяют свой объем – набухают. При диффузии в них возникают переменные поля концентрации жидкости и соответствующие поля деформаций и напряжений.

Особенностью древесины и древесных конструкционных материалов является наличие предельной концентрации влаги (предел гигроскопичности), выше которой механические свойства и геометрические размеры не изменяются.

Из-за анизотропности древесины наибольшая усушка (разбухание) происходит в тангенциальном направлении, примерно в 2 раза меньше усушка в радиальном направлении, еще меньше – вдоль волокон. Вследствие анизотропии в замкнутом неодносвязном теле, каким является труба, напряжения будут возникать даже при постоянной по объёму концентрации влаги. Они могут представлять серьезную опасность для работоспособности конструкции и приводить к растрескиванию стенок трубы.

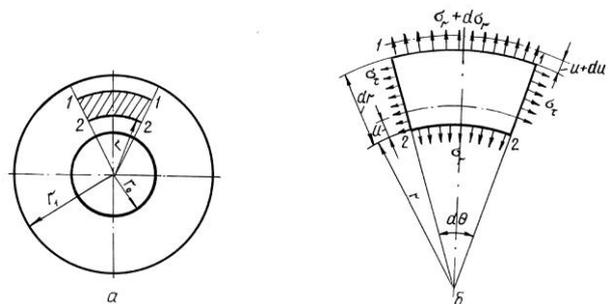
Рассмотрим случай, когда влага распределена равномерно в материале трубы. Это характерно для условий длительного транспортирования жидкости или при хранении труб во влажной атмосфере. Равновесное значение влажности  $W_p$  при различной относительной влажности воздуха  $\omega$  [4] приведено в табл. 1.

Таблица 1

| $\omega$ , % | $W_p$ | $\omega$ , % | $W_p$ |
|--------------|-------|--------------|-------|
|              |       |              |       |

|    |     |    |      |
|----|-----|----|------|
| 5  | 1,3 | 55 | 10,1 |
| 10 | 2,5 | 60 | 11,1 |
| 15 | 3,5 | 65 | 12,0 |
| 20 | 4,5 | 70 | 13,1 |
| 25 | 5,4 | 75 | 14,4 |
| 30 | 6,2 | 80 | 16,0 |
| 35 | 6,9 | 85 | 17,9 |
| 40 | 7,7 | 90 | 20,5 |
| 45 | 8,5 | 95 | 23,9 |
| 50 | 9,2 | 98 | 26,6 |

Рис. 1. Равновесие участка сечения трубы



Выделим бесконечно малый элемент трубы (рис. 1) и рассмотрим условия его равновесия. На его гранях будут действовать только нормальные напряжения. Спроектируем их на вертикальную ось симметрии. Заменим  $\sin \frac{d\Theta}{2} = \Theta$ ,  $\cos \frac{d\Theta}{2} = 1$  и, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\sigma_r - \sigma_\tau + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\tau$  – напряжения в радиальном и тангенциальном направлениях;  
 $r$  – радиус.

Второе уравнение найдем из условия совместности тангенциальных и радиальных деформаций. Перемещения точек внутренней дуги элемента обозначим через  $u$ , внешней дуги –  $u + du$ . Толщина элемента до деформации равняется  $dr$ , после деформации –  $dr + du$ .

Отсюда относительная деформация в радиальном направлении

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad (2)$$

относительная деформация в тангенциальном направлении

$$\varepsilon_\tau = \frac{u}{r}. \quad (3)$$

Дифференцируя выражение (3) и сравнивая с (2), имеем

$$\frac{d\varepsilon_\tau}{dr} = \frac{1}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_\tau). \quad (4)$$

Связь между напряжениями и деформациями с учетом разбухания древесины представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \chi_1 + \frac{1}{E_1} \sigma_r - \frac{\mu_{12}}{E_1} \sigma_\tau; \\ \varepsilon_\tau &= \chi_2 + \frac{1}{E_2} \sigma_r - \frac{\mu_{21}}{E_2} \sigma_r, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $E_1$ ,  $\mu_{12}$ ,  $\chi_1$  и  $E_2$ ,  $\mu_{21}$ ,  $\chi_2$  – модули упругости, коэффициенты Пуассона и относительные деформации разбухания соответственно в радиальном и тангенциальном направлениях.

Решая совместно (1), (4) и (5) и учитывая, что для ортотропного (цилиндрически-анизотропного) материала  $E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12}$ , получаем разрешающее уравнение задачи:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1 - K^2) \sigma_r = E_2(\chi_1 - \chi_2), \quad (6)$$

$$\text{где } K^2 = E_2/E_1. \quad (7)$$

Тогда решение уравнения (6) будет иметь следующий вид:

$$\sigma_r = C_1 r^{1+K} + C_2 r^{-1-K} + \frac{E_2(\chi_1 - \chi_2)}{1 - K^2}, \quad (8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Если труба не нагружена ни внешним, ни внутренним давлением, то на ее поверхностях радиальные напряжения равны нулю:

$$\sigma_r = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_0.$$

Подставляя эти условия в (8), получаем систему уравнений для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 r_1^{-1+K} + C_2 r_1^{-1-K} &= -\frac{E_2(\chi_1 - \chi_2)}{1 - K^2}; \\ C_1 r_0^{-1+K} + C_2 r_0^{-1-K} &= -\frac{E_2(\chi_1 - \chi_2)}{1 - K^2}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{E_2(\chi_1 - \chi_2)}{1 - K^2} \cdot \frac{1 - \rho^{-1-K}}{(1 - \gamma^{-2K}) r_0^{-1+K}}; \\ C_2 &= -\frac{E_2(\chi_1 - \chi_2)}{1 - K^2} \cdot \frac{1 - \rho^{-1+K}}{(1 - \gamma^{-2K}) r_0^{-1+K}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\rho = r/r_0$ ;

$\gamma = r_0/r$ .

Подставим полученные выражения для  $C_1$  и  $C_2$  в (8):

$$\sigma_r = \frac{E_2(\chi_1 - \chi_2)}{1 - K^2} [1 - A(\gamma)\rho^{-1+K} - B(\gamma)\rho^{-1-K}], \quad (10)$$

$$\text{где } A(\gamma) = \frac{1 - \gamma^{-1-K}}{1 - \gamma^{2K}};$$

$$B(\gamma) = \frac{1 - \gamma^{-1+K}}{1 - \gamma^{2K}} = 1 - A(\gamma).$$

Используя (1), получим формулу для определения окружных напряжений:

$$\sigma_{\tau} = \frac{E_2(\chi_1 - \chi_2)}{1 - K^2} [1 - KA(\gamma)\rho^{-1+K} - KB(\gamma)\rho^{-1-K}]. \quad (11)$$

Численные значения величин  $\chi_1$  и  $\chi_2$  могут быть с достаточной точностью определены по имеющимся в литературе данным для степени усушки фанеры и древесины березы [2].

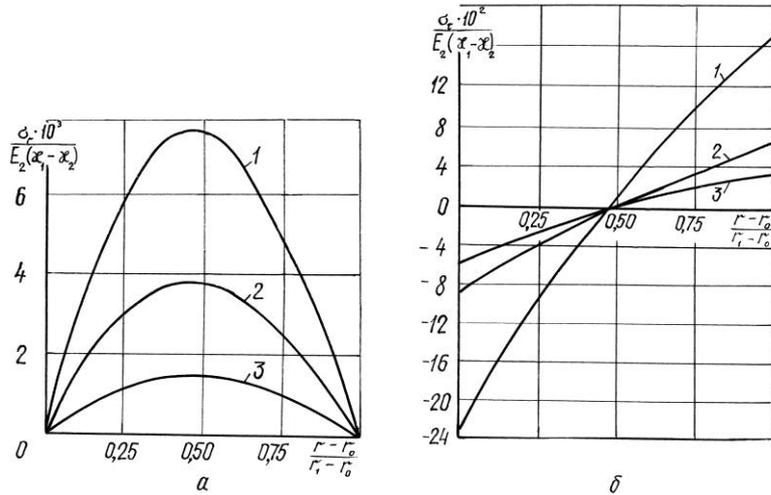
Таблица 2

| $\gamma$ | $\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}$ | $\sigma_r = \frac{\sigma_r \cdot 10^3}{E_2(\chi_1 - \chi_2)}$ | $\sigma_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau} \cdot 10^3}{E_2(\chi_1 - \chi_2)}$ |
|----------|-----------------------------|---|---|
| 0,83     | 0,00                        | 0,00  | -92,9   |
|          | 0,25                        | -3,19   | -42,2   |
|          | 0,50                        | -3,92   | 2,5   |
|          | 0,75                        | -2,50   | 42,6  |
|          | 1,00                        | 0,00  | 74,8  |
| 0,87     | 0,00                        | 0,00  | -43,8   |
|          | 0,25                        | -1,15   | -20,4   |
|          | 0,50                        | -1,44   | 0,9   |
|          | 0,75                        | -1,03   | 20,9  |
| 0,91     | 1,00                        | 0,00  | 39,9  |
|          | 0,00                        | 0,00  | -29,8   |
|          | 0,25                        | 0,53  | -14,2   |
|          | 0,50                        | 0,67  | 0,4   |
|          | 0,75                        | 0,49  | +14,5   |
|          | 1,00                        | 0,00  | 28,1  |

Разбухание происходит только в процессе поглощения влаги. Повышение влажности выше предела гигроскопичности  $W_{п.г} = 30\%$  не приводит к дальнейшему разбуханию. Интересующие нас значения разбухания фанеры по толщине могут быть получены по данным [3] для отечественных пород древесины: усушка в тангенциальном направлении составляет 6 ... 10 %, в радиальном – 3 ... 5 %, вдоль волокна – 0,1 ... 0,3 %, полная объемная усушка – около 15 %.

Для вычисления усадки клееной конструкции используем предлагаемое в [1] правило смесей:

$$\chi = \frac{\sum \chi_i E_i t_i}{\sum E_i t_i},$$



где  $\chi_i$ ,  $E_i$ ,  $t_i$  – соответственно усадка, модуль упругости и толщина  $i$ -го слоя.

При равномерном распределении влаги были рассчитаны напряжения в стенках фанерных труб, отнесенные к величине  $E_2(\chi_1, \chi_2)$  для ряда значений  $\gamma = r_0/r_1$  при отношении модулей упругости в радиальном и окружном направлениях (табл. 2).

Радиальные напряжения достигают максимума вблизи срединной поверхности трубы, окружные – на внутренней поверхности; чуть ниже они на наружной поверхности (рис. 2).

Приводимые в литературе данные об упругих характеристиках древесины березы, березового шпона и фанеры весьма разноречивы, поэтому для оценки достоверности полученных результатов необходимо выяснить их чувствительность к изменению параметра  $K$ . Расчеты,

Рис. 2. Напряжения в стенке трубы из фанеры при равномерном увлажнении ( $E_1/E_2 = 0,065$ ): 1 –  $\gamma = 0,79$ ; 2 – 0,83; 3 – 0,87;  $a$  – радиальное направление;  $b$  – окружное

выполненные с помощью ЭВМ, показывают, что эта зависимость чрезвычайно слабая, и возможные ошибки в определении  $K$  приводят к несущественным погрешностям.

Разрушение при сжатии может быть реализовано в относительно толстых слоях шпона, когда перпендикулярно направленные волокна не оказывают поддерживающего действия. Если напряжения отсутствуют во влажном состоянии (например вследствие их релаксации), то при полном высушивании радиальные напряжения, оставаясь такими же по модулю, изменяют знак. Это может оказаться еще более опасным, поскольку прочность при растяжении практически не зависит от толщины шпона. С другой стороны, неравномерное распределение влаги по толщине стенки более опасно, чем полное влагонасыщение.

Распространение влаги поперек волокон при влажности ниже предела гигроскопичности в первом приближении подчиняется обычному уравнению диффузии. Для радиального потока массопереноса оно будет иметь следующий вид [1]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (12)$$

где  $\omega$  – концентрация влаги;

$a^2$  – коэффициент влагопроводности.

Для древесины березы в направлении поперек волокон этот коэффициент равен  $(3 \dots 4) \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с, что обеспечивает достаточно быстрое (за несколько часов) достижение равновесного состояния для конструкций толщиной примерно 10 мм.

При переменном по толщине поле концентрации влаги местное (в точке) разбухание можно принять пропорциональным условной концентрации влаги:

$$\chi_i = \beta_i (\omega - \omega_0); \quad 0 < \omega < \omega_{п.г.}, \quad (13a)$$

где  $\beta_i$  – эмпирический коэффициент;

$\omega_0$  – влажность в исходном состоянии,  $\omega_0 < \omega_{п.г.}$

При усушке от начальной влажности ( $\omega_0 > \omega_{п.г.}$ )

$$\chi_i = \beta_i (\omega - \omega_{п.г.}). \quad (13б)$$

В этом случае в рассмотренном ранее элементе сечения будет действовать фиктивная объемная сила  $\beta_\Theta E_\Theta r \frac{du}{dr}$ , и уравнение (б) примет вид

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1 - K^2) \sigma_r = \beta_\Theta E_\Theta r \frac{d\omega}{dr} (\beta_0 - \beta_r) E_\Theta \omega. \quad (14)$$

Здесь  $\beta_\Theta$  – эмпирический коэффициент.

Общее решение этого уравнения

$$\sigma_r = C_1 r^{-1+K} + C_2 r^{-1-K} + \frac{1}{2K} \left[ \frac{r^{-1+K}}{1-K} \int F(\omega, r) r^{-K} dr - \frac{r^{-1-K}}{1+K} \int F(\omega, r) r^{-K} dr \right], \quad (15)$$

где  $F(\omega, r)$  – правая часть уравнения (14).

Рассмотрим нестационарный случай – контакт с жидкостью на внешней поверхности.

При  $r_1 = r_2$  имеем  $\omega = \omega_{п.г.}$ ; при  $r = r_1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0$  имеем  $\omega = \omega_0$

(при  $t = 0$ ). (Если отсчитывать влажность от исходного состояния, то можно положить  $\omega_0 = 0$ ).

Тогда

$$\omega = \omega_{п.г.} \left\{ \frac{\ln \rho}{\ln \gamma} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \alpha_n^2 t} \frac{I_0(r_1 \alpha_n) I_0(r_0 \alpha_n)}{I_0^2(r_0 \alpha_n) - I_0^2(r_1 \alpha_n)} [I_0(r \alpha_n) \gamma_0(r_0 \alpha_n) + \gamma_0(r \alpha_n) I_0(r \alpha_n)] \right\},$$

где  $\alpha_n$  – корни уравнения  $I_0(r_0 \alpha) \gamma(r_0 \alpha) - \gamma_0(r_0 \alpha) I_0(r_1 \alpha) = 0$ ;

$n$  – натуральное число;

$I_0, \gamma_0$  – символы функций Бесселя и Неймана нулевого порядка.

Для различных моментов времени выражение (16) может быть аппроксимировано параболами вида

$$\omega = \omega_{\text{п.г}} \left[ 1 - \left( \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} \right)^l \right],$$

где  $l$  – уменьшается с течением времени.

Это позволяет получить решение в замкнутом виде при  $l = 2$  и  $\beta_2 = 0$ :

$$\sigma_r = \beta_1 E_2 \frac{\omega_{\text{п.г}}}{1 - \gamma^2} \left[ \Pi_1 \rho^{-1+K} + \Pi_2 \rho^{-1-K} - \frac{\gamma^2 \rho^2}{9-K} + \frac{2\gamma\rho}{4-K} - \frac{2\gamma - \gamma^2}{1-K} \right];$$

$$\sigma_\theta = \beta_1 E_2 \frac{\omega_{\text{п.г}}}{1 - \gamma^2} \left[ \Pi_1 K \rho^{-1+K} + \Pi_2 K \rho^{-1-K} - \frac{3\gamma^2 \rho^2}{9-K} + \frac{3\gamma\rho}{4-K} - \frac{2\gamma - \gamma^2}{1-K} \right],$$

где  $\beta_1, \beta_2$  – эмпирические коэффициенты.

$\Pi_1$  и  $\Pi_2$  – определяются из решения системы

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 + \Pi_2 &= \frac{\gamma^2}{9-K} - \frac{2\gamma}{4-K} + \frac{2\gamma - \gamma^2}{1-K}; \\ \Pi_1 \gamma^{1-K} + \Pi_2 \gamma^{1+K} &= \frac{1}{K} \left( \frac{1}{9-K} - \frac{2}{4-K} + \frac{2\gamma - \gamma^2}{1-K} \right) \end{aligned} \right\}$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А.В. Теплообмен. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
2. А.А. Вислов и др. Справочник по производству фанеры. – М.: Лесн. пром-сть, 1984. – 932 с.
3. Перелыгин Л.М. Древесиноведение. – М.: Лесн. пром-сть, 1969. – 320с.
4. Справочное руководство по древесине / Пер. с англ. Я.П. Горелика, Т. З. Михайловой. – М.: Лесн. пром-сть, 1979. – 544 с.

С.-Петербургская лесотехническая академия

Поступила 23.03. 98

*V.V. Sergeevichev*

#### **Analysis of Veneer Pipe Tension**

The problem of walls' tension for veneer pipes is solved under the equal distribution of moisture along their thickness.