

УДК 676.028.3

Н.В. Куцубина, С.Н. Удинцева

Куцубина Нелли Валерьевна родилась в 1965 г., окончила в 1988 г. Уральский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры машин и оборудования целлюлозно-бумажного производства Уральского государственного лесотехнического университета. Имеет более 20 работ в области виброзащиты и диагностики оборудования предприятий лесопромышленного комплекса.



Удинцева Светлана Николаевна родилась в 1968 г., окончила в 1990 г. Уральский государственный университет, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Уральского государственного лесотехнического университета. Имеет 10 печатных работ в области математического моделирования вибрационных процессов в оборудовании ЦБП.



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАМОТКИ РУЛОНОВ БУМАГИ НА ПРОДОЛЬНО-РЕЗАТЕЛЬНЫХ СТАНКАХ*

Выявлены зависимости радиальных и касательных напряжений по толщине рулона, возникающих при намотке бумаги; установлено распределение давления между слоями в рулоне в зависимости от его радиуса и действующего суммарного натяжения бумаги.

Ключевые слова: математическое моделирование, бумага, намотка рулонов, плотность намотки, радиальные и касательные напряжения, давление.

Обеспечение заданной плотности рулонов бумаги потребительских размеров – важнейшее требование к продольно-резательным станкам и другим отделочным машинам. Это обусловлено необходимостью сохранения формы рулона при его транспортировании и хранении, а также требованиями к равномерности натяжения бумаги при размотке рулонов на типографских машинах [2, 3]. Плотность рулона характеризуется давлением между слоями бумаги, которое зависит от давления, вызываемого натяжением каждого наматываемого на рулон слоя бумаги. Натяжение поверхностного слоя обусловлено натяжением бумаги между раскатом и несущим валом, силой прижима рулона к несущим валам и дополнительными тангенциальными усилиями на поверхностный слой бумаги приводного, прижимного и второго несущего валов. Управление качеством намотки рулонов осуществляется с учетом перечисленных факторов.

Цель статьи – определить радиальные и касательные напряжения в толще рулона в зависимости от натяжения поверхностных слоев бумаги при ее намотке в рулон.

* Статья подготовлена под руководством проф. А.А. Санникова.

Принимаем, что рулон бумаги представляет собой упруго деформируемое тело, в объеме которого возникают радиальные (нормальные) σ_r и касательные σ_t , напряжения. Для моделирования напряженного состояния рулона воспользуемся теорией плоской деформации толстостенных цилиндров, нагруженных постоянным по периметру и длине давлением p [1]. Величина этого давления пропорциональна линейному натяжению бумаги q и обратно пропорциональна радиусу рулона r_p : $p = q / r_p$.

Рассмотрим толстостенный цилиндр с наружным радиусом r_p и внутренним радиусом, равным радиусу гильзы r_r . На цилиндр действует равномерно распределенное давление p от натяжения поверхностного слоя бумаги (рис. 1).

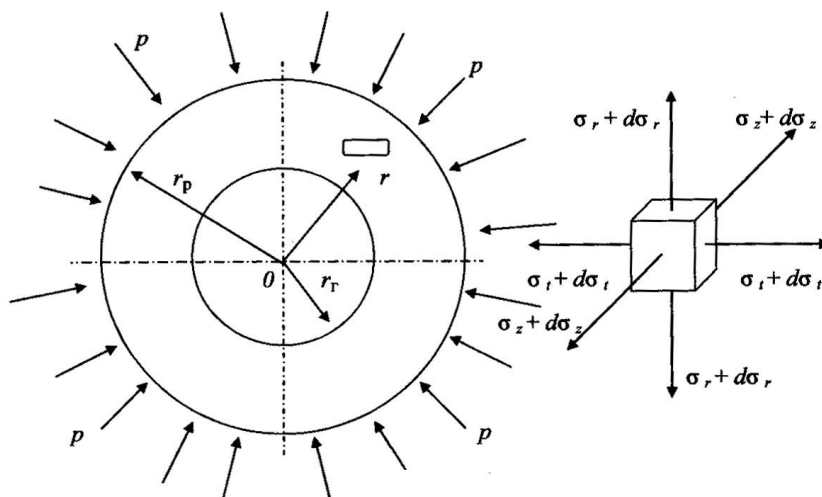


Рис. 1. Напряжение в толстостенном цилиндре

Введем обозначения:

$\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ – радиальное, касательное и аксиальное напряжения;

$\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_z$ – относительные удлинения в соответствующих направлениях;

ρ – безразмерный текущий радиус рулона, $\rho = r/r_p$;

r – радиус рулона для слоя, в котором определяют напряжение;

k – отношение внутреннего радиуса рулона к наружному, $k = r_r/r_p$;

u – радиальное перемещение;

i – количество слоев в рулоне;

E_b и E_p – модуль продольной упругости бумаги и рулона;

q – натяжение бумаги;

δ – толщина бумаги;

μ – коэффициент Пуассона.

На рулон не действуют продольные силы, поэтому $\sigma_z = 0$.

Напряжения σ_r и σ_t удовлетворяют условию равновесия

$$\frac{d(\rho\sigma_r)}{d\rho} - \sigma_t = 0. \quad (1)$$

Деформации ε_r и ε_t связаны с радиальными перемещениями следующими уравнениями:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{r_p} \cdot \frac{du}{d\rho}; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{r_p} \cdot \frac{u}{\rho}. \quad (2)$$

Исключив из уравнений (2) радиальные перемещения, перейдем к уравнению совместности деформаций:

$$\frac{d}{d\rho}(\rho\varepsilon_t - \varepsilon_r) = 0.$$

Выразив деформации через напряжения с помощью закона Гука, получим

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_p}(\sigma_r - \mu\sigma_t); \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E_p}(\sigma_t - \mu\sigma_r); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_p}(-\mu\sigma_r - \mu\sigma_t).$$

Учитывая, что $\frac{d\sigma_z}{d\rho} = 0$, преобразуем уравнение совместности, выраженное через напряжения, к виду

$$\frac{d}{d\rho}(\rho\sigma_t) - \sigma_r - \mu \left[\frac{d}{d\rho}(\rho\sigma_r) - \sigma_t \right] = 0. \quad (3)$$

При совместном решении уравнений (2) и (3) получим:

$$\sigma_r = A - B \frac{1}{\rho^2}; \quad \sigma_t = A + B \frac{1}{\rho^2}.$$

Произвольные постоянные A и B , возникающие при интегрировании дифференциальных уравнений, могут быть найдены из граничных условий при $r = r_r$; $\rho = k$; $\sigma_r = 0$ и при $r = r_p$; $\rho = 1$; $\sigma_r = -p$.

Определим A и B :

$$A = -\frac{p}{1-k^2}; \quad B = -\frac{pk^2}{1-k^2}.$$

Учитывая, что $r_p = r_r + i\delta$, получим формулы для нахождения радиальных и касательных напряжений σ_r и σ_t в отдельно взятом слое в зависимости от натяжения поверхностного слоя бумаги без учета действия натяжения нижележащих слоев:

$$\sigma_r = -\frac{q}{(r_r + i\delta) \left(1 - \frac{r_r^2}{(r_r + i\delta)^2} \right)} \left(1 - \frac{r_r^2}{r^2} \right); \quad (4)$$

$$\sigma_t = - \frac{q}{(r_r + i\delta) \left(1 - \frac{r_r^2}{(r_r + i\delta)^2} \right)} \left(1 + \frac{r_r^2}{r^2} \right). \quad (5)$$

Из зависимостей (4) и (5) следует, что радиальные напряжения уменьшаются от поверхностности к центру рулона, а касательные возрастают, если рассматривать напряженное состояние в зависимости от воздействия натяжения поверхностного слоя.

По напряжениям σ_r и σ_t определим радиальное перемещение слоя с радиусом r :

$$u_r = \frac{1}{E_p} (\sigma_t - \mu \sigma_r) r. \quad (6)$$

На промежуточный слой бумаги радиуса r действует давление от всех вышележащих (по радиусу) слоев бумаги, поэтому необходимо провести суммирование напряжений в рулоне на текущем радиусе r под действием натяжения всех вышележащих (по радиусу) слоев бумаги с учетом радиальной деформации рулона под воздействием суммарных нагрузок. Полагая, что при намотке рулона натяжение бумаги было неизменным, и пренебрегая ползучестью и релаксацией напряжений в бумаге, получим следующие зависимости для определения напряжений σ_r и σ_t в отдельном слое бумаги на текущем радиусе r с учетом действия всех намотанных выше слоев бумаги:

$$\sigma_r = - \sum_{i=N_R}^N \frac{q}{(r_r + i\delta) \left(1 - \frac{r_r^2}{(r_r + i\delta)^2} \right)} \left(1 - \frac{r_r^2}{r^2} \right); \quad (7)$$

$$\sigma_t = - \sum_{i=N_R}^N \frac{q}{(r_r + i\delta) \left(1 - \frac{r_r^2}{(r_r + i\delta)^2} \right)} \left(1 + \frac{r_r^2}{r^2} \right), \quad (8)$$

где N – полное число витков бумаги в рулоне, $N = (r_p - r_r) / \delta$;

N_R – число витков бумаги в рулоне от радиуса r до радиуса r_p ,

$$N_R = (r_p - r) / \delta.$$

Под действием давления вышележащих слоев бумаги рулон деформируется, радиус r уменьшается на величину Δu , определенную по формуле (6). При этом натяжение бумаги в нижележащих слоях уменьшается по сравнению с натяжением при намотке на величину $\Delta q_1 + \Delta q_2$.

Согласно закону Гука,

$$\Delta q_1 = \frac{\Delta u}{r} E_0 \delta.$$

Величину Δq_2 , появляющуюся из-за отрицательных касательных напряжений, определим по формуле

$$\Delta q_2 = \sigma_r \delta.$$

Тогда натяжение бумаги в отдельном слое

$$q_i = q_{i+1} - \Delta q_1 - \Delta q_2, \quad (9)$$

где q_{i+1} – натяжение бумаги в предыдущем слое.

Используя формулы (7) и (8), можно найти суммарное натяжение бумаги в слое j . Введем обозначение:

$$S_j = \left[\left(\frac{E_\delta}{E_p} + 1 \right) \left(1 + \frac{r_r^2}{(r_r + j\delta)^2} \right) - \frac{E_\delta}{E_p} \mu \left(1 - \frac{r_r^2}{(r_r + j\delta)^2} \right) \right].$$

Тогда

$$q_j = \sum_i q_{i+1} \left[1 - \frac{\delta S_j}{(r_r + i\delta) \left(1 - \frac{r_r^2}{(r_r + i\delta)^2} \right)} \right]. \quad (10)$$

С учетом натяжения бумаги q_i определим давление между слоями бумаги в рулоне:

$$p_j = \sum_i \frac{q_{i+1}}{(r_r + i\delta)} \left[1 - \frac{\delta S_j}{(r_r + i\delta) \left(1 - \frac{r_r^2}{(r_r + i\delta)^2} \right)} \right]. \quad (11)$$

Численные расчеты по зависимостям (10), (11) подтвердили достоверность модели [4]. На рис. 2 в качестве примера приведены зависимости,

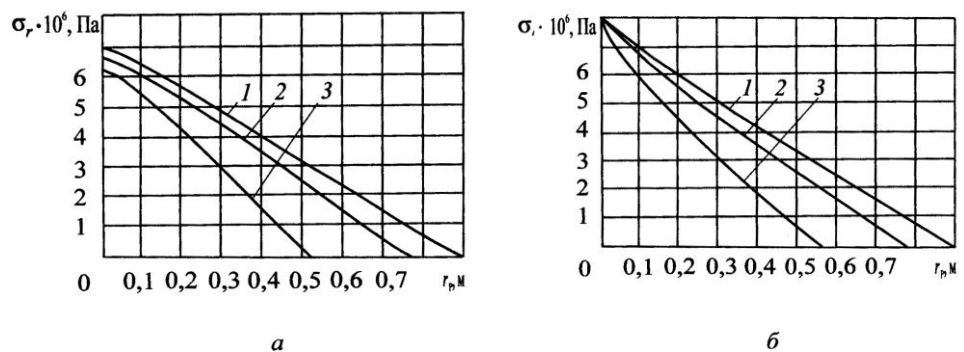


Рис. 2. Зависимость радиальных σ_r (а) и касательных σ_t (б) напряжений в рулоне бумаги радиусом: 1 – 0,90 м; 2 – 0,78; 3 – 0,56 м

отражающие изменения радиальных и касательных напряжений по толщине рулона бумаги (толщина 0,0002 м, линейное натяжение $q = 1,6$ кН/м).

Регулирование напряженного состояния в толще рулона можно осуществлять изменением натяжения бумаги в процессе намотки. Полученные зависимости (10) и (11) являются основой для оптимизации процесса управления намоткой рулонов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Расчеты на прочность в машиностроении [Текст]: справочник: в 3 т./ под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1959. – 1118 с.
2. *Смирнов, Ю.Н.* Исследование намотки рулонов на накатах отделочных станков [Текст] / Ю.Н. Смирнов, А.В. Столяров // Бумагоделательное машиностроение. – Л.: ЦНИИбуммаш, 1978. – Вып. 23. – С. 101–105.
3. *Смирнов, Ю.Н.* Расчет напряжений в рулоне из вязкоупругого материала [Текст] / Ю.Н. Смирнов, Е.М. Глезин // Создание бумагоделательного оборудования для выработки бумаги и картона с использованием вторичного сырья: сб. тр / ЦНИИбуммаш. – Л.: ЦНИИбуммаш, 1983. – С. 105–114.
4. *Удинцева, С.Н.* Вибрационные процессы при намотке рулонов бумаги на продольно-резательных станках [Текст]: дис. ... канд. техн. наук / Удинцева С.Н. – Екатеринбург, 2004. – 174 с.

N.V. Kutsubina, S.N. Udintseva

Mathematical Simulation of Paper Rolling Processes on Slitting Machines

Dependencies of radial and tangent tension along the roll thickness appearing in paper rolling process are discovered. Pressure distribution between paper layers in the roll is established depending on its radius and acting total paper tension.
