$$C'_j = C'_{1j}\gamma_j; \tag{14}$$

$$K'_j = K_{1j}\gamma_j, \tag{15}$$

где C_{1j}, K_{1j} — условно-постоянные затраты и капитальные вложения соответственно по одному потоку, реализующему j-ю технологию.

4. Рабочее ограничение вида

$$x^q_{ij} \geqq 0; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad q = \overline{1, Q}. \tag{16}$$

5. Рабочее ограничение вида

$$x^q_{ij} = 0, \text{ если } y_j = 0. \tag{17}$$

6. По максимальному объему капитальных вложений K_{max}

$$\sum_{j=1}^{m} K_j y_j \leqslant K_{max}. \tag{18}$$

7. По площади участка раскроя

$$\sum_{j=1}^{m} S_j y_j \leqslant S_{max}, \tag{19}$$

где S_j — площадь, необходимая для оборудования по реализации j-й технологии раскроя;
S_{max} — максимальная площадь участка раскроя.

Ограничения по другим технико-экономическим показателям можно записать аналогичным образом.

Итак, построенная математическая модель задачи определения оптимального соотношения целых и клееных заготовок представляет собой частично-целочисленную задачу математического программирования. Для ее реализации получены численные значения коэффициентов выхода заготовок и других коэффициентов целевой функции и ограничений.

Поступила 1 февраля 1988 г.

УДК 674.09-791.8.001.57

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ МЕХАНИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДРЕВЕСИНЫ

В. В. ОГУРЦОВ

Сибирский технологический институт

Математическое моделирование различных свойств древесины часто базируют на корреляционном анализе. Представляет интерес влияние погрешностей измерения параметров древесины (условно обозначим их через X и Y) на коэффициент корреляции r_{XY} между ними.

Выражение для r_{XY} запишем через смешанный центральный момент второго порядка [2]

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \tag{1}$$

где σ_X, σ_Y — среднеквадратические отклонения параметров X, Y;
K_{XY} — корреляционный момент случайных величин

$$K_{XY}=M\left(\left(X-M_X\right)\left(Y-M_Y\right)\right). \qquad (2)$$

Здесь M — математическое ожидание произведения центрированных величин X, Y;
M_X, M_Y — математические ожидания величин X, Y.

Переходим от расчетных значений, содержащих случайные ошибки измерения ΔX, ΔY к действительным $X_д$, $Y_д$:

$$K_{XY}=M\left(\left((X_д+\Delta X)-M_X\right)\left((Y_д+\Delta Y)-M_Y\right)\right). \qquad (3)$$

Преобразовываем уравнение (3) с учетом того, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$K_{XY}=K_{XY_д}+K_{X\Delta Y}+K_{Y\Delta X}+K^{с}_{\Delta X\Delta Y}, \qquad (4)$$

где $K_{XY_д}$ — корреляционный момент случайных величин $X_д$, $Y_д$;
$K^{с}_{\Delta X\Delta Y}$ — корреляционный момент взаимосвязанных ошибок измерения X, Y.

Корреляционные моменты $K_{X\Delta Y}$ и $K_{Y\Delta X}$ равны нулю, так как соответствующие им пары $X - \Delta Y$ и $Y - \Delta X$ являются не связанными случайными величинами. Тогда

$$K_{XY}=K_{XY_д}+K^{с}_{\Delta X\Delta Y}. \qquad (5)$$

Выразим:

$$\sigma_X=\sqrt{\sigma^2_{X_д}+\sigma^2_{ошX}}; \qquad (6)$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\sigma^2_{Y_д}+\sigma^2_{ошY}}, \qquad (7)$$

где $\sigma_{X_д}$, $\sigma_{Y_д}$ — среднеквадратические отклонения $X_д$, $Y_д$;
$\sigma_{ошX}$, $\sigma_{ошY}$ — среднеквадратические ошибки измерения $X_д$, $Y_д$.

Тогда

$$r_{XY}\sqrt{\left(\sigma^2_{X_д}+\sigma^2_{ошX}\right)\left(\sigma^2_{Y_д}+\sigma^2_{ошY}\right)}=K_{XY_д}+K^{с}_{\Delta X\Delta Y}. \qquad (8)$$

Разделим левую и правую части на $\sigma_{X_д}\sigma_{Y_д}$

$$r_{XY}\sqrt{1+\frac{\sigma^2_{ошX}}{\sigma^2_{X_д}}+\frac{\sigma^2_{ошY}}{\sigma^2_{Y_д}}+\frac{\sigma^2_{ошX}\sigma^2_{ошY}}{\sigma^2_{X_д}\sigma^2_{Y_д}}}=r_{XY_д}+\frac{K^{с}_{\Delta X\Delta Y}}{\sigma_{X_д}\sigma_{Y_д}}. \qquad (9)$$

Здесь $r_{XY_д}$ — коэффициент корреляции между $X_д$, $Y_д$.

Последний член под корнем выражения (9) на порядок меньше остальных, поэтому его можно отбросить. После алгебраических преобразований имеем

$$r_{XY_д}=r_{XY}\sqrt{1+\frac{\sigma^2_{ошX}}{\sigma^2_X-\sigma^2_{ошX}}+\frac{\sigma^2_{ошY}}{\sigma^2_Y-\sigma^2_{ошY}}}-$$

$$-r^{с}_{ошXY}\frac{\sigma^{с}_{ошX}\sigma^{с}_{ошY}}{\sqrt{\left(\sigma^2_X-\sigma^2_{ошX}\right)\left(\sigma^2_Y-\sigma^2_{ошY}\right)}}, \qquad (10)$$

где $r^{с}_{ошXY}=\dfrac{K^{с}_{\Delta X\Delta Y}}{\sigma^{с}_{ошX}\sigma^{с}_{ошY}}$ — коэффициент корреляции между ошибками измерения X, Y;
$\sigma^{с}_{ошX}$, $\sigma^{с}_{ошY}$ — взаимосвязанные среднеквадратические ошибки измерения X, Y.

Из выражения (10) видно, что ошибки измерения X, Y влияют на коэффициент корреляции по двум направлениям. Во-первых, взаимосвязанные ошибки $\sigma^c_{ошX}$, $\sigma^c_{ошY}$ увеличивают согласованное варьирование X, Y около своих математических ожиданий и, как следствие, завышают коэффициент корреляции. Во-вторых, общие ошибки $\sigma_{ошX}$, $\sigma_{ошY}$, увеличивая σ_X, σ_Y и не оказывая влияния на $K_{XY_д}$, занижают коэффициент корреляции. Первая погрешность имеет знак «+» и определяется вторым членом правой части выражения (10). Вторая погрешность имеет знак «—» и определяется первым членом под корнем правой части выражения (10). В зависимости от соотношения связанных и несвязанных погрешностей измерения X, Y, а также значений r_{XY}, $r^c_{ошXY}$ погрешность определения коэффициента корреляции может иметь как положительный, так и отрицательный знак.

Используя выражение (10), исследуем влияние ошибок измерения модуля упругости E и предела прочности σ древесины пиломатериалов (при изгибе) на коэффициент корреляции $r_{E\sigma}$ между ними.

Определим среднеквадратические ошибки измерения E и σ при допустимых по ГОСТ 21554.1—81 и 21554.2—81 погрешностях измерения параметров пиломатериалов, используя известные формулы для E и σ, а также выражение для ошибки косвенных измерений [1]:

$$\sigma_{ошE} = 0{,}03 \ldots 0{,}05 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{ош\sigma} = 0{,}1 \ldots 0{,}2 \text{ МПа};$$

$$\sigma^c_{ошE} = 0{,}02 \ldots 0{,}03 \text{ ГПа}; \quad \sigma^c_{ош\sigma} = 0{,}05 \ldots 0{,}1 \text{ МПа}.$$

Подставляя наибольшие из этих погрешностей в выражение (10), найдем:

$$r_{E\sigma д} = 1{,}0009 r_{E\sigma} - 0{,}00025.$$

Следовательно, допускаемые ГОСТ погрешности измерения при определении E и σ снижают коэффициент корреляции всего на 0,0003...0,0006 (на 0,05...0,07 %).

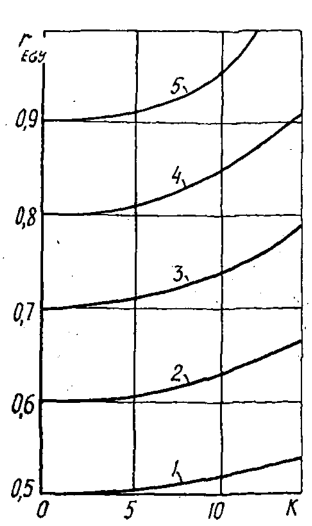

Рис. 1. Кривая 1 — $r_{E\sigma}$ = 0,5; 2 — 0,6; 3 — 0,7; 4 — 0,8; 5 — 0,9

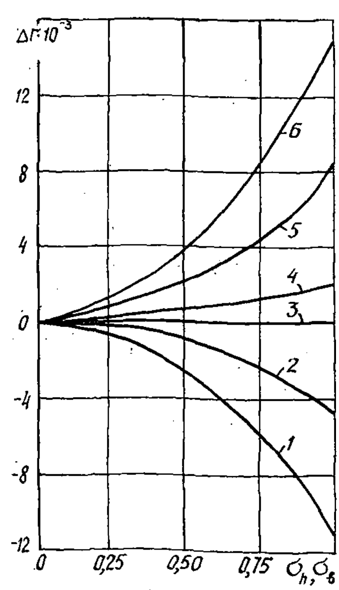

Рис. 2. Кривая 1 — $r_{E\sigma}$ = 0,50; 2 — 0,60; 3 — 0,67; 4 — 0,70; 5 — 0,80; 6 — 0,90

На рис. 1 представлена зависимость снижения коэффициента корреляции $r_{E\sigma Y}$ от кратности K увеличения погрешностей измерения E и σ, допускаемых ГОСТ 21554.1—81, 21554.2—81. Из графиков видно, что если измерения производить с погрешностями, в 5 раз превышающими допускаемые стандартами, то занижение коэффициента корреляции составляет от 0,005 до 0,013 (на 1 ... 1,5 %), а если в 10 раз, то — от 0,01 до 0,04 (на 3 ... 6 %).

Интерес представляет влияние неравномерного повышения погрешностей на точность определения коэффициента корреляции, поскольку аппаратурные погрешности, как правило, не меняются от опыта к опыту, а обусловленные варьированием параметров пиломатериалов могут меняться в зависимости от методики исследования.

На рис. 2 представлена зависимость поправки Δr к коэффициенту корреляции в связи с варьированием толщины σ_h и ширины σ_b пиломатериалов при погрешностях измерения остальных параметров, соответствующих указанным выше стандартам.

Из рис. 2 видно, что ошибки определения коэффициентов корреляции $r_{E\sigma}$ зависят от значений этих коэффициентов, а также от величин варьирования толщины и ширины пиломатериалов. От $r_{E\sigma}$ зависит не только модуль ошибки, но и ее знак: при $r_{E\sigma} > 0{,}67$ ошибки имеют знак «—», при $r_{E\sigma} < 0{,}67$ — знак «+» (поправки имеют обратные знаки). Абсолютные значения ошибок определения коэффициентов корреляции не превышают 0,015. Значение $r_{E\sigma}$, при котором происходит полная компенсация положительных и отрицательных компонентов ошибок, зависит от несвязанных погрешностей при определении E и σ.

Варьирование влажности пиломатериалов в пределах от 13 до 25 % увеличивает максимальную ошибку определения коэффициента корреляции до 0,02.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, коэффициент корреляции между E и σ слабо чувствителен к варьированию толщины, ширины и влажности пиломатериалов, поэтому при его определении можно оперировать со средними значениями этих параметров; во-вторых, требования существующих стандартов чрезмерно жесткие для исследования взаимосвязей между модулем упругости и пределом прочности древесины пиломатериалов, их соблюдение не гарантирует получение устойчивых, достаточно высоких коэффициентов корреляции; в-третьих, низкие коэффициенты корреляции нельзя объяснить только низкой точностью измерений.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Зайдель А. Н. Ошибки измерений физических величин.— Л.: Наука, 1974.— 108 с. [2]. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений.— М.: Наука, 1971.— 576 с.

Поступила 11 февраля 1988 г.

УДК 630*812

КАЧЕСТВО ДРЕВЕСИНЫ ДУГЛАСИИ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ

О. И. ПОЛУБОЯРИНОВ, Н. О. КРЕПАК

Ленинградская лесотехническая академия

Дугласия *Pseudotsuga menziesii* (Mirb) France относится к древесным породам, успешно интродуцированным в СССР. Общая площадь культур дугласии в нашей стране, по ориентировочным данным,