ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 4 ЛЕСНОЙ ЖУРНАЛ 1958

О РАСЧЕТЕ ПО ЭЛАСТИКОВОЙ ТЕОРИИ ПУЧКОВ ПУЧКОВЫХ ПЛОТОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ НАХОЖДЕНИЯ ИХ НА СУШЕ

А. Г. ВОРОБЬЕВ

Профессор

1. Теорию пучка пучковых плотов, называемую нами эластиковой, мы уже либо специально трактовали [1], либо упоминали в связи с другими вопросами [2], [3]. Однако полного изложения теории в печати еще никем дано не было *. В настоящей статье предпринимается попытка дать таковое. В качестве примера взят расчет пучка для случая нахождения его на суше. Этот случай лежит в основе расчета пучка на плаву и уже по одной этой причине должен быть изложен раньше; кроме того, он более прост.

2. Эластиковая теория уподобляет совокупность комплектуемых в пучок бревен некоей несжимаемой ** жидкости, а сам пучок — части матерчатой невесомой бесконечно длинной цилиндрической оболочки, наполненной под давлением этой жидкостью. Оболочка, принимающая форму, сечение которой достаточно точно изображено на рис. 1, покоится на опорной, горизонтальной, абсолютно жесткой плоскости, уподобляемой земле.

Как нами установлено [3], кривая $BAHA_1B_1$ удовлетворяет условию

$$\rho y = \text{const}\,, \tag{1}$$

где y — расстояние по вертикали от любой точки кривой до уровня жидкости в манометрической трубке (рис. 1), а ρ — радиус кривизны в этой точке.

Кривая и является так называемой (нами) бесперегибной эластикой, известной в науке еще со времен Эйлера [6], который называл ее упругой кривой восьмого вида. После Эйлера исследованием этой кривой занималось большое количество математиков, механиков, физиков и инженеров (Сегнер, Лаплас, Юнг и др.). Для настоящего исследования наиболее важны параметрические уравнения бесперегибной эластики в осях xOy

* Существует общедоступное частичное изложение эластиковой теории — [4].

** Как показывает практика лесосплава, может оказаться имеющим практическое значение построение теории пучка в предположении сжимаемой жидкости (учет сжимаемости совокупности бревен пучка при различных натяжениях в обвязках) [5]. Пока можно только сказать, что форма поперечного сечения пучка эластикой быть тогда перестанет.

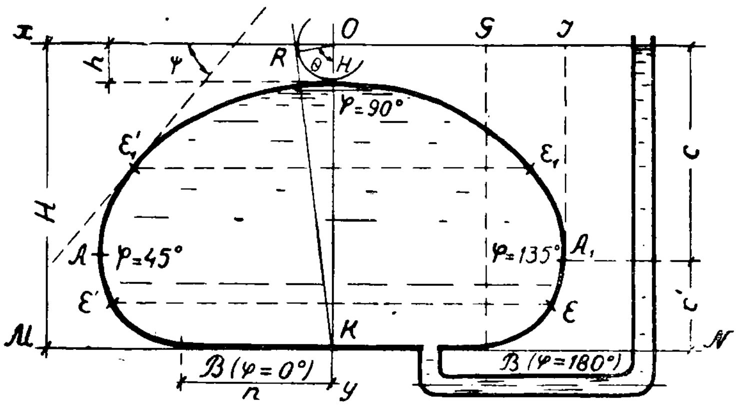

Рис. 1.

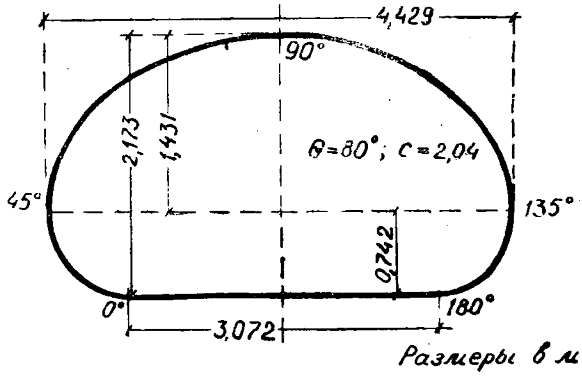

Рис. 2.

(рис. 1), впервые предложенные приблизительно в одно время Беером [7] и Рэнкиным [8]. Эти уравнения имеют вид

$$x = \frac{1}{4} H f \tag{2}$$

и

$$y = H\Delta, \tag{3}$$

где

$$f = f(\Theta,\varphi) = 2\{(2 - \sin^2\Theta)[\mathbf{K}(\Theta) - \mathrm{F}(\Theta,\varphi)] - 2[\mathbf{E}(\Theta) - \mathrm{E}(\Theta,\varphi)]\}, \tag{4}$$

а

$$\Delta = \Delta(\Theta,\varphi) = \sqrt{1 - \sin^2\Theta \sin^2\varphi}. \tag{5}$$

Фигурирующие в (2) — (5) длина H и модулярный угол Θ показаны на рис. 1. Для данной бесперегибной эластики эти величины постоянны, а параметром является угол φ, изменяющийся вдоль дуги; на рис. 1 также показаны * значения φ в точках B, A, H, A_1 и B_1. Наконец $\mathbf{K}(\Theta)$ и $\mathbf{E}(\Theta)$

* Бесперегибная эластика является кривой с периодом в 180°, поэтому углы φ могут также отличаться от обозначенных на рис. 2 на углы N180°, где N — любое целое число. Само собой разумеется, что нет надобности иметь дело с углами φ, лежащими вне диапазона 0° — 180°.

являются хорошо известными полными, а $F(\Theta, \varphi)$ и $F(\Theta, \varphi)$ — неполными эллиптическими интегралами.

Из уравнений (3) и (2) можно установить множество нужных нам свойств бесперегибной эластики. Так, например, из них получается ее фундаментальное и широко известное свойство (1).

$$y\rho = \frac{1}{4} H^2 \sin^2 \Theta = \text{const}. \tag{6}$$

Если ввести в (6) полезное для последующих математических выкладок обозначение

$$\frac{1}{2} H \sin \Theta = \lambda^*,$$

то (6) запишется в виде

$$y\rho = \lambda^2.$$

Далее из (2) и (3) легко установить, что

$$\text{tg}\psi = \frac{dy}{dx} = -\text{tg}\, 2\varphi,$$

откуда

$$\psi + 2\varphi = 180^\circ. \tag{7}$$

Из (2) и (3) можно показать, что «периметр» эластики BB_1:

$$\text{П} = L + 2n = 2(\mathbf{K} - \mathbf{E}) H, \tag{8}$$

где $2n$ — «отверстие» эластики.

$$2n = \frac{1}{2} Hf(\Theta, 0^\circ) = H[(2 - \sin^2 \Theta)\mathbf{K} - 2\mathbf{E}], \tag{9}$$

а

$$L = \smile BAHA_1B_1 = H\text{К} \sin^2 \Theta.$$

Наконец из (2) и (3) можно получить [10] формулу для вычисления площади сегмента эластики $E_1{}'HE_1$ $(E'AHA_1E)$ в виде

$$\omega = \frac{1}{2} f' H^2, \tag{10}$$

где

$$f' = f'(\Theta, \varphi) = f\Delta - \sin^2 \Theta \sin 2\varphi. \tag{11}$$

Отсюда имеем

$$\omega_0 = \text{площ. } BAHA_1B_1B = \frac{1}{2} f'_0 H^2 = \frac{1}{2} f(\Theta, 0^\circ) H^2 = 2nH = BB_1 \cdot KO^{**} \tag{12}$$

На основании теории гибкой нерастяжимой нити получаем поперечное погонное натяжение в гибкой (матерчатой) оболочке

$$T = q\rho = \Gamma y\rho = \Gamma\lambda^2 = \frac{1}{4} H^2 \Gamma \sin^2 \Theta,$$

---

* Уместно отметить, что $\lambda = \frac{1}{2} KR$ (рис. 1) и как доказал Т. Юнг [9], λ^2 является площадью фигур OHE_1A_1IO (рис. 1) с одной стороны и GB_1AIG с другой.

** Этот результат впервые был получен Женевуа [11], а впоследствии, независимо от него, нами [10] и чрезвычайно легко и изящно доказывается на основе геометрической интерпретации — λ^2, отмеченной в первой сноске.

где q — давление в жидкости на уровне с ординатой равной y, а Γ — объемный вес жидкости, наполняющей оболочку.

3. После изложенного в пункте 2 можно дать следующий способ расчета пучка для случая нахождения его на суше. Предположим, что заданы объем древесины, формируемой в пучок — V, объемный вес древесины — γ, коэффициент полнодревесности пучка — ν и средняя расчетная длина бревен в пучке — l. Определяем объем пучка

$$V = \frac{v}{\nu};$$

площадь поперечного сечения пучка

$$\Omega = \frac{V}{l};$$

объемный вес «пучковой жидкости»

$$\Gamma = \nu\gamma$$

и задаемся модулярным углом Θ. Так как в данном случае

$$\Omega = \omega_0,$$

то из (12)

$$H = \sqrt{\frac{\Omega}{f(\Theta, 0^\circ)}} = \sqrt{\frac{\Omega}{(2 - \sin^2\Theta)\mathbf{K} - 2\mathbf{E}}}.$$

После этого, имея в виду (8) находим Π, а с помощью понятного равенства

$$q_0 = H\Gamma$$

высчитываем «давление» в «пучковой жидкости» на уровне опорной плоскости, и далее по формуле

$$q_0' = \Gamma h \doteq \Gamma H \cos\Theta$$

находим «давление» жидкости в наивысшей точке H. Значение p_0 и величин q_0' дает возможность судить о прочности пучка и поэтому очень важно. Усилие в каждой из обвязок (их две) будет, очевидно, равно:

$$S = \frac{1}{2} lT = \frac{1}{8} lH^2 \sin^2\Theta\Gamma \tag{13}$$

Высота пучка

$$b = H - h = (1 - \cos\Theta)H = 2H\sin^2\frac{\Theta}{2}; \tag{14}$$

ширина его

$$B = 2x_A = \frac{1}{2}Hf(\Theta, 45^\circ), \tag{15}$$

ординаты точек A и A_1 определяются выражением

$$c = \sqrt{\frac{2 - \sin^2\Theta}{2}}\, H$$

и возвышение этих точек над опорною плоскостью MN можно вычислить по формуле

$$c' = \left(1 - \sqrt{\frac{2 - \sin^2\Theta}{2}}\right)H.$$

Наконец, «отверстие эластики» определяется формулой (9).

Специалисты лесосплава важной характеристикой считают «коэффициент формы»

$$C = \frac{B}{b},$$

который на основании (15), (14) и (6) будет

$$C = \frac{1}{2}\left\{(2 - \sin^2\Theta)[\mathbf{K} - \mathrm{F}(\Theta,\ 45°)] - 2[\mathbf{E} - \mathrm{E}(\Theta,\ 45°)]\operatorname{cosec}^2\frac{\Theta}{2}\right\}.$$

Видно, что C является функцией одного лишь модулярного угла. Задаваясь различными Θ, можно составить таблицу величин Π, S, q_0, q_0', H, h, B, b, $2n$ и C и получить таким образом все необходимые данные для суждения о прочности, размерах и форме пучка для случая нахождения его на суше. Для выбранного пучка, пользуясь уравнениями (2) и (3), можно построить по точкам все сечение. Впрочем, в этом практически нет большой надобности, если учесть, что вся эластика с большой точностью может быть заменяема некоторым полуэллипсом на дуге $\smile AHA_1$ [12] и двумя четвертями некоторого другого эллипса на дугах $\smile BE'A$ и $\smile B_1EA_1$ (наше предложение).

4. В заключение приводим численный пример.

Нами был рассчитан пучок со следующими параметрами $v = 35{,}0$ *м*³, $l = 6{,}50$ *м*, $\gamma = 800$ *кг/м*³ и $\nu = {}^2/_3$. Результаты сведены в таблицу.

Таблица 1

Θ	H *м*	q_0 *кг/м*²	h *м*	q'_0 *кг/м*²	B *м*	b *м*	C	Π *м*	S *m*
0°	∞	∞	∞	∞	3,206	3,206	1,000	10,07	∞
30°	24,49	13060	21,21	11310	3,278	3,095	1,059	10,09	62,79
45°	10,06	5365	7,113	3793	3,392	2,947	1,158	10,13	21,92
60°	5,434	2898	2,717	1449	3,620	2,717	1,332	10,27	9,5965
65°	4,531	2416	1,915	1021	3,739	2,616	1,430	10,37	7,306
70°	3,802	2028	1,300	693,3	3,905	2,502	1,561	10,54	5,531
75°	3,176	1694	0,8219	438,3	4,113	2,354	1,747	10,74	4,179
80°	2,630	1403	0,4566	243,5	4,429	2,173	2,038	11,12	2,906
85°	2,098	1119	0,1829	97,54	4,960	1,915	2,590	11,83	1,892
89°	1,533	817,5	0,02675	14,27	6,083	1,506	4,039	13,59	1,018
89°30′	1,399	746	0,01221	6,512	6,521	1,387	4,702	14,35	0,848
89°54′	1,187	633	0,002071	1,104	7,442	1,185	6,280	15,99	0,610

С их помощью можно получить другие данные, нужные для проектирования пучка. На рис. 2 представлена примерная форма поперечного сечения пучка, рассчитанного для случая $\Theta = 80°$ ($C = 2{,}038 \approx 2$; $\Pi = 11{,}2$ *м*).

Численные расчеты можно значительно упростить, если составить всевозможного вида расчетные номограммы.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. А. Г. Воробьев. Об естественной форме поперечных сечений пучков пучковых плотов. Высшее Арктическое Морское училище им. адм. Макарова. Ученые записки, вып. II, 1951. [2]. А. Г. Воробьев. К вопросу об естественной форме поперечных сечений пучков пучковых плотов (сигар). ЛОНТОВТ. «Сб. трудов», вып. III, 1956.

[3]. А. Г. Воробьев и Н. И. Смирнов. Приборы ВС-1 и ВС-3 для расчета пучков. «Лесная промышленность» № 9, 1957. [4]. А. Л. Можевитинов. Форма сечения и натяжения обвязок морских плотов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Ленинград, 1947. (Машинописная рукопись в библиотеке ЛПИ) [5]. Н. Н. Калихевич. Исследование усилий при сжатии бревен в пучки. Научно-исследовательский сектор Ленинградской лесотехнической академии им. С. М. Кирова. Сб. научно-исследовательских работ по лесосплаву. Под редакцией Б. Ю. Калихевича. 1940. [9]. Л. Эйлер. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. ГТТИ. М.-Л., 1934. (7). A. Beer. Tractatus de theoria matematica — phaenomenorum in liquidis actioni gravitatis detractis observatorum, Bonnae, MDCCCVII. [8]. W. I. M. Rankine. A mannual of applied mechanics, London and Glasgou, 1858. [9]. T. Yung. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. Yol., London, 1807. [10]. А. Ворбйов. Про площу безперегинної еластики. Прикладная механика, т. III, вып. 1, Київ, 1957. [11]. L. Genevois. Forme rationelle des gross conduites, „Genie Civil", 1929. [12]. Yvon Villarceau. Equilibre des voutes en berceau cylindriques, dans laquelles le plans de tête sont perpendiculaires a l'axe. „Revue generale de l'architecture et des travaux publics", 1844.

Поступила в редакцию
25 февраля 1958 г.