

УДК 674.093

## ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ ПИЛОВОЧНИКА БОЛЬШИХ РАЗМЕРОВ С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ДВУХ ПАР БОКОВЫХ ДОСОК

© *А.И. Агапов, д-р техн. наук, проф.*

Вятский государственный университет, ул. Московская, 36, г. Киров, Россия, 610000; e-mail: [agapov\\_ai.34@mail.ru](mailto:agapov_ai.34@mail.ru)

Рассмотрена задача определения оптимальных размеров брусьев и досок при первом проходе раскроя пиловочника больших размеров с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и двух пар боковых досок. В математической модели целевая функция составлена в виде суммы площадей поперечных сечений трех брусьев и двух пар боковых досок. Уравнения связи, раскрывающие взаимосвязь размеров брусьев и боковых досок с диаметром пиловочника, получены на основе теоремы Пифагора. При решении математической модели использован метод множителей Лагранжа. В результате решения задачи получен алгоритм, с использованием которого численным методом определены размеры брусьев и досок, а также значение целевой функции. Результаты расчетов показали, что целевая функция принимает максимальное значение при толщине бруса, равной 0,18 от диаметра бревна в вершинном торце. Установлено, что с увеличением толщины брусьев возрастает их объем, размеры боковых досок и их объем уменьшаются, но, самое главное, сумма объемов брусьев и досок принимает максимальное значение только при определенных соотношениях размеров этих брусьев и досок. Суммарная толщина всех трех выпиливаемых брусьев составляет 0,54 от диаметра бревна в вершинном торце, объем получаемых обрезных брусьев – 70 %, объем обрезных боковых досок – 30 % от всего объема обрезных досок. Оптимальная пифагорическая зона для рассматриваемого варианта раскроя пиловочника равна 0,922 от диаметра бревна в вершинном торце. Предложенный алгоритм решения задачи рекомендуется использовать при расчете и составлении поставок.

*Ключевые слова:* раскрой пиловочника, критерий оптимальности оптимизации, двухконтный брус, боковые доски, целевая функция, уравнение связи, алгоритм решения задачи.

При распиловке пиловочника больших размеров рекомендуется использовать брусковый способ раскроя с выпиливанием двух или трех брусьев [3, 4]. Из боковой части бревна можно получить еще несколько пар досок.

Рассмотрим вариант раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и двух пар боковых досок (см. рисунок).

Необходимо знать оптимальные размеры брусьев и досок. Постановка и решение такой оптимизационной задачи основываются на следующей гипотезе. С увеличением толщины брусьев объем их возрастает, объем боковых досок уменьшается. Очевидно имеется такое соотношение размеров брусьев и досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение.

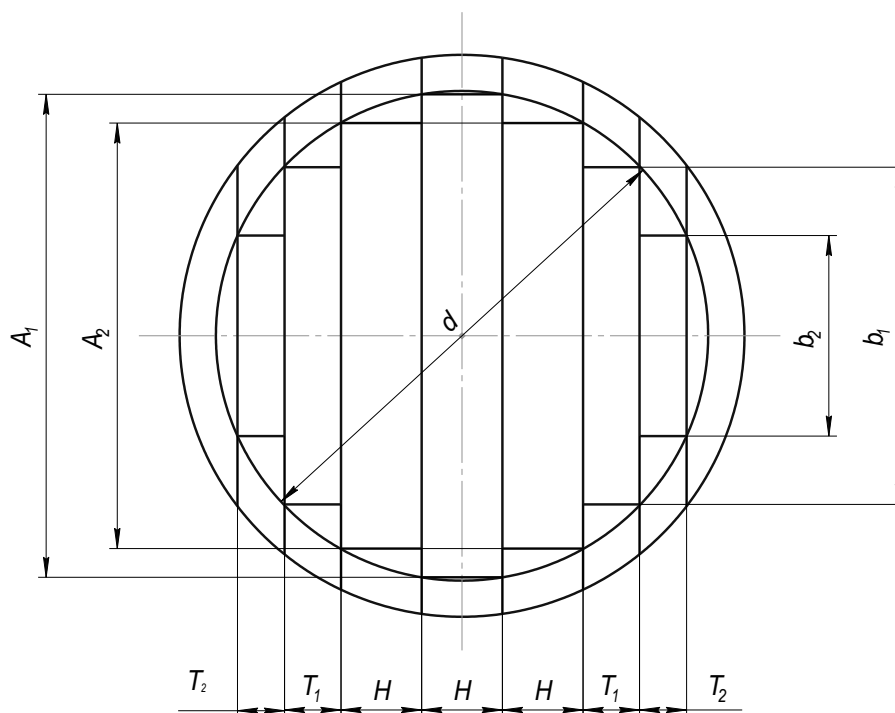


Схема раскря пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и двух пар боковых досок

Для решения задачи составляем математическую модель [1, 2]. В качестве критерия оптимальности выбираем объемный выход четырехкантных брусьев и боковых обрезных досок, получаемых при первом проходе брусово-развального способа раскря. Целевую функцию  $Z$  записываем в виде суммы площадей поперечных сечений трех брусьев и двух пар боковых обрезных досок:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2, \quad (1)$$

где  $H$  – толщина бруса;

$A_1$  – ширина пласти центрального бруса;

$A_2$  – ширина наружной пласти боковых брусьев;

$T_1, T_2$  – толщина первой и второй пар боковых досок;

$b_1, b_2$  – ширина наружных пластей первой и второй пар боковых досок.

Для составления уравнения связи воспользуемся теоремой Пифагора. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и досок можно представить следующими уравнениями:

для центрального бруса

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0; \quad (2)$$

для боковых брусьев

$$d^2 - 9H^2 - A_2^2 = 0; \quad (3)$$

для первой пары боковых досок

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2 = 0; \quad (4)$$

для второй пары боковых досок

$$d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2 = 0, \quad (5)$$

где  $d$  – диаметр бревна в верхнем торце.

Полагаем, что математическая модель составлена. Для решения данной модели воспользуемся методом множителей Лагранжа [1, 5]. Функцию Лагранжа  $L$  записываем в следующем виде:

$$\begin{aligned} L = & HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + \lambda_1(d^2 - H^2 - A_1^2) + \\ & + \lambda_2(d^2 - 9H^2 - A_2^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2) + \\ & + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  – множители Лагранжа.

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A_1} &= H - 2\lambda_1 A_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial A_2} &= 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial H} &= A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 18\lambda_3 H - 12\lambda_3 T_1 - 18\lambda_4 H - 12\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 T_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial b_1} &= 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial T_1} &= 2b_1 - 12\lambda_3 H - 8\lambda_3 T_1 - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial b_2} &= 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial T_2} &= 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 = 0. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Решаем систему уравнений (7) совместно с уравнениями связи [1].

Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (7):

$$T_2 = \lambda_4 b_2; \quad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \quad (8)$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (7), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_2 + 6\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_1. \quad (9)$$

В равенство (9) подставляем выражение (8):

$$b_2^2 = 4T_2^2 + 6HT_2 + 4T_1T_2 = 2T_2(3H + 2T_1 + 2T_2). \quad (10)$$

Из уравнения связи (5) выражаем ширину второй пары досок и подставляем в равенство (10):

$$8T_2^2 + 18HT_2 + 12T_1T_2 + 9H^2 + 12HT_1 + 4T_1^2 - d^2 = 0,$$

затем из полученного равенства выражаем толщину второй пары досок:

$$T_2 = \frac{1}{8} \left( \sqrt{8d^2 + (3H + 2T_1)^2} - 3(3H + 2T_1) \right).$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (7):

$$T_1 = \lambda_3 b_1; \quad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \quad (11)$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (7):

$$b_1 = 6\lambda_3 H + 4\lambda_3 T_1 + b_2. \quad (12)$$

Равенство (12) записываем в следующем виде:

$$b_1 = b_2 + 2\lambda_3(3H + 2T_1). \quad (13)$$

Подставляем равенство (11) в уравнение (13):

$$b_1^2 = b_1 b_2 + (3H + 2T_1) 2T_1. \quad (14)$$

Тогда ширину второй доски определяем по формуле

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1). \quad (15)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (7):

$$H = 2\lambda_1 A_1; \quad \lambda_1 = \frac{H}{2A_1}. \quad (16)$$

Используя уравнение связи (2), записываем

$$\lambda_1 = \frac{H}{2\sqrt{d^2 - H^2}}. \quad (17)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (7):

$$H = \lambda_2 A_2; \quad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}. \quad (18)$$

Используя уравнение связи (3), записываем

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - 9H^2}}. \quad (19)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (7):

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 18\lambda_3 H + 12\lambda_3 T_1 + 18\lambda_4 H + 12\lambda_4 T_1 + 12\lambda_4 T_2. \quad (20)$$

С учетом равенств (8) и (12) имеет

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 3b_1. \quad (21)$$

В уравнение (21) подставляем равенства (16) и (18):

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + \frac{18H^2}{A_2} + 3b_1. \quad (22)$$

Решая равенство (22) относительно ширины первой пары досок, получаем

$$b_1 = \frac{A_1 + 2A_2}{3} - \frac{H^2(A_2 + 18A_1)}{3A_1A_2}. \quad (23)$$

Из уравнения связи (2) ширину пласти центрального бруса определяем по формуле

$$A = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (24)$$

Из уравнения связи (3) находим ширину наружной пласти боковых брусьев:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2}. \quad (25)$$

Используя выражения (24) и (25), ширину первой доски определяем по формуле (23), а используя уравнение связи (4), толщину первой доски находим по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H). \quad (26)$$

Ширину второй пары досок  $b_2$  определяем по формуле (15). Зная  $b_2$  и используя уравнение связи (5), рассчитываем толщину второй пары досок:

$$T_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1)). \quad (27)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (7) и все уравнения связи. Получены формулы для определения размеров брусьев и досок. Однако в этих формулах параметры брусьев и досок взаимосвязаны, что затрудняет непосредственное нахождение оптимальных их значений. Поэтому для определения оптимальных размеров брусьев и досок воспользуемся численным методом. Задаемся толщиной бруса, а остальные размеры брусьев и досок определяем по ранее

полученным формулам. Путем перебора толщины бруса находим максимальное значение целевой функции. Это и будет являться оптимальным вариантом.

Для облегчения расчетов и анализа результатов полученные ранее формулы представляем в относительных единицах, полагая  $m_H = H/d$ .

Тогда расчетные формулы алгоритма решения задачи имеют следующий вид:

ширина пласти центрального бруса

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}; \quad (28)$$

ширина наружной пласти боковых брусьев

$$m_{A_2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - 9m_H^2}; \quad (29)$$

ширина первой доски

$$m_{b_1} = \frac{m_{A_1} + 2m_{A_2}}{3} - \frac{m_H^2(m_{A_2} + 18m_{A_1})}{3m_{A_1}m_{A_2}}; \quad (30)$$

толщина первой пары досок

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = \left( \sqrt{1 - m_{b_1}^2} - 3m_H \right); \quad (31)$$

ширина второй пары досок

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}(3m_H + 2m_{T_1}); \quad (32)$$

толщина второй пары досок

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - m_{b_2}^2} - (3m_H + 2m_{T_1}) \right); \quad (33)$$

площадь поперечного сечения брусьев

$$Z_{\text{бр}} = m_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}; \quad (34)$$

площадь поперечного сечения боковых досок

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T_1} m_{b_1} + 2m_{T_2} m_{b_2}; \quad (35)$$

суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (36)$$

Расчеты производим в два этапа. Вначале задаемся значениями  $m_H$  с градацией (интервалом) 0,01 в пределах 0,15...0,21 и находим максимальное значение

целевой функции. Затем вокруг полученного максимального значения целевой функции задаем относительной толщиной бруса  $m_H$  с градацией 0,001 и находим максимум целевой функции. Этот вариант и будет отвечать решению данной задачи, так как такая точность расчета вполне достаточна при составлении поставок. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Анализируя данные табл. 1, можно сделать вывод, что наибольший выход пилопродукции наблюдается при толщине бруса  $H = 0,18d$ . Следовательно, соотношения размеров брусьев и досок, полученные при этой толщине бруса, и будут оптимальными. Таким образом, впервые аналитическим путем определены оптимальные размеры брусьев и досок при распиловке бревен очень больших размеров брусом-развальным способом с выпиливанием трех одинаковых по толщине брусьев и двух пар боковых досок; подтверждена ранее выдвинутая гипотеза о том, что с увеличением толщины брусьев объем их возрастает, а объем боковых досок уменьшается, но имеется такое сочетание значений этих параметров, при которых целевая функция максимальна. Это важное свойство и дает основание для определения оптимальных размеров

Таблица 1

**Относительные размеры брусьев и досок и площади их поперечных сечений  
при относительной толщине бруса**

$m_H$	$m_{A_1}$	$m_{A_2}$	$m_{b_1}$	$m_{T_1}$	$m_{b_2}$	$m_{T_2}$	$Z_{бр}$	$Z_0$	$Z$
0,15	0,98869	0,89303	0,79831	0,07613	0,68345	0,06388	0,416211	0,208854	0,625065
0,16	0,98712	0,87727	0,73015	0,10164	0,53991	0,07922	0,438665	0,233970	0,672635
0,17	0,98544	0,86017	0,69057	0,10663	0,46720	0,08044	0,459985	0,222441	0,682425
<b>0,18</b>	<b>0,98367</b>	<b>0,84167</b>	<b>0,64705</b>	<b>0,11122</b>	<b>0,38493</b>	<b>0,08025</b>	<b>0,480059</b>	<b>0,205715</b>	<b>0,685775</b>
0,19	0,98178	0,82164	0,59920	0,11532	0,29095	0,07810	0,498764	0,183604	0,682368
0,20	0,97980	0,80000	0,54632	0,11879	0,18210	0,07285	0,515959	0,156325	0,672284
0,21	0,97770	0,77660	0,48788	0,12146	0,05326	0,06283	0,531487	0,125204	0,656691
0,175	0,98457	0,85110	0,66933	0,10898	0,42738	0,08055	0,470185	0,214745	0,684930
0,176	0,98439	0,84924	0,66496	0,10944	0,41910	0,08053	0,472187	0,213046	0,685233
0,177	0,98421	0,84737	0,66054	0,10989	0,41073	0,08049	0,474175	0,211294	0,685469
0,178	0,98403	0,84548	0,65609	0,11034	0,40224	0,08043	0,476150	0,209489	0,685639
0,179	0,98385	0,84358	0,65160	0,11079	0,39364	0,08035	0,478111	0,207629	0,685740
<b>0,18</b>	<b>0,98367</b>	<b>0,84167</b>	<b>0,64705</b>	<b>0,11122</b>	<b>0,38493</b>	<b>0,08025</b>	<b>0,480059</b>	<b>0,205715</b>	<b>0,685775</b>
0,181	0,98348	0,83973	0,64246	0,11166	0,37610	0,08013	0,481994	0,203747	0,685741
0,182	0,9833	0,83779	0,63784	0,11209	0,36715	0,07999	0,483914	0,201725	0,685639
0,183	0,98311	0,83582	0,63316	0,11250	0,35808	0,07984	0,485821	0,199649	0,685470
0,184	0,98293	0,83384	0,62844	0,11293	0,34890	0,07965	0,487713	0,197518	0,685231
0,185	0,98274	0,83190	0,62368	0,11334	0,33960	0,07950	0,489591	0,195334	0,684925

брусьев и досок. Необходимо знать следующие оптимальные соотношения размеров брусьев и досок при  $H = 0,18d$ :

$$\lambda_1 = 0,092; \lambda_2 = 0,214; \lambda_3 = 0,172; \lambda_4 = 0,209; \frac{A_2}{A_1} = 0,860; \frac{b_1}{A_2} = 0,769; \frac{b_2}{b_1} = 0,590; \frac{T_1}{H} = 0,620; \frac{T_2}{T_1} = 0,722; \frac{Z_{бр}}{Z} = 0,700; \frac{Z_{д}}{Z} = 0,300.$$

В этом случае охват бревна поставом, или размер пифагорической зоны,  $E = 0,922d$ .

Получается, что объем брусьев составляет 70 %, объем досок – 30 % от всего объема получаемых обрезных досок.

Зная оптимальные соотношения брусьев и досок, можно определить размеры пиловочника, которые обеспечивают получение требуемых размеров досок. Результаты расчетов размеров брусьев и досок из пиловочника различных диаметров представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Оптимальные расчетные размеры брусьев и досок  
для различных диаметров бревен**

Параметр	Размеры брусьев и досок, мм, для бревен диаметром, см										
	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
$H$	108,0	115,2	122,4	129,5	136,8	144,0	151,2	158,4	165,6	172,8	180,0
$A_1$	590,4	629,7	669,1	708,4	747,8	787,2	826,6	865,9	905,3	944,6	984,0
$A_2$	505,2	530,2	572,6	606,2	639,9	673,6	707,3	740,9	774,6	808,3	842,0
$T_1$	66,7	71,2	75,6	80,1	84,5	90,0	93,4	97,8	102,3	106,8	111,2
$b_1$	388,2	414,1	440	465,8	491,7	517,6	543,5	569,4	595,2	621,1	647,0
$T_2$	48,3	51,5	54,7	57,9	61,1	64,4	67,6	70,8	74,0	77,2	80,4
$b_2$	231,0	246,4	261,8	277,2	292,6	308,0	323,4	338,8	354,2	369,6	385,0

Результаты расчетов показывают, что для диаметров пиловочника 60...100 см толщина бруса колеблется от 100 до 180 мм, толщина досок – от 48 до 110 мм. Эти размеры брусьев и досок имеют достаточно широкое распространение в промышленности. Наиболее распространены обрезные доски шириной 125...150 мм. Поэтому брусья такой толщины рекомендуется выпиливать из бревен диаметром 72...88 см (с учетом припуска на усушку).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов А.И. Оптимизация брусово-развального способа раскроя пиловочника с выпиливанием двух бусьев. Киров: ВятГУ, 2011. 77 с.



2. *Агапов А.И.* Оптимизация технологических процессов деревообработки: учеб. пособие. Киров: ВятГУ, 2012. 81 с.
3. *Ветшева В.Ф.* Показатели использования крупномерных бревен при распиловке их с брусковкой на один, два и три бруса разной толщины // *Деревообраб. пром-сть.* 1971. № 7. С. 10–13.
4. *Ветшева В.Ф.* Раскрой крупномерных бревен на пиломатериалы. М.: Лесн. пром-сть, 1976. 168 с.
5. *Пижурин А.А., Розенблит М.С.* Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки: учеб. для вузов. М.: Лесн. пром-сть, 1988. 293 с.

Поступило 08.11.13

UDC 674.093

### **Optimization of Cutting of Large-Size Sawlog with Sawing Out of Three Square Beams and Two Pairs of Side Boards**

*A.I. Agapov, Doctor of Engineering, Professor*

Vyatka State University, Moskovskaya, 36, Kirov, 610000, Russia;

e-mail: agapov\_ai.34@mail.ru

The problem of determining the optimum dimensions of beams and boards on the first pass of the cutting of sawlog of large dimensions has been solved with sawing out of three squared beams of the same thickness and two pairs of side boards. In the mathematical model the goal function is a square sum of the cross-section areas of the three beams and two pairs of side boards. The equations of connection, showing the interconnection of the sizes of the beams and side boards with the sawlog diameter, are received on the Pythagorean Theorem base. The mathematical model has been solved by the Lagrangian multiplier method. An algorithm has been worked out by solving the problem, with the help of which, by using a numerical method, the optimal sizes of beams and boards have been found as well as the value of the goal function. It has been determined that the goal function has its maximal value when the thickness of the beam is 0.18 of the log diameter in its top butt-end. It was found that with increasing of boards thickness, their volume increases and the size of the side boards and the volume of these boards is reduced, but the most important, the sum of the amounts of boards and beams takes the maximum value only at a certain ratio of the sizes of these boards and beams. The total thickness of all three squared beams is 0,54 from the log diameter at the top butt-end, the amount of pruned beams is 70%, and the volume of the cutting side boards is 30% of the total volume of plank timber. Pythagorean zone for the given version of cutting out of sawlog is 0.922 from the log diameter in its top butt-end. The proposed algorithm for solving the problem is recommended to use when supply calculating and drafting.

*Keywords:* cutting of sawlog, optimal criterion of optimization, two-edging squared beam, side boards, goal function, equation of connection, problem algorithm.

REFERENCES

1. Agapov A.I. *Optimizatsiya brusovo-razval'nogo sposoba raskroya pilovochnika s vypilivaniem dvukh brus'ev* [Optimization of Beam-Breaking Way of Sawlog Cutting with Sawing Out of Two Beams]. Kirov, 2011. 77 p.
2. Agapov A.I. *Optimizatsiya tekhnologicheskikh protsessov derevoobrabotki* [Optimization of Technological Processes of Woodworking]. Kirov, 2012. 81 p.
3. Vetsheva V.F. Pokazateli ispol'zovaniya krupnomernykh breven pri raspilovke ikh s brusovkoy na odin, dva i tri brusa raznoy tolshchiny [The Usage of the Large Logs While Cutting Them with Log Squaring on One, Two and Three Beams with Different Thickness]. *Derevoobratyvyayushchaya promyshlennost'*, 1971, no. 7, pp. 10–13.
4. Vetsheva V.F. Raskroy krupnomernykh breven na pilomaterialy [Cutting of Large Logs for Saw-Timber]. Moscow, 1976. 168 p.
5. Pizhurin A.A., Rozenblit M.S. *Osnovy modelirovaniya i optimizatsii protsessov derevoobrabotki* [Fundamentals of Modeling and Optimization of Processes]. Moscow, 1988. 293p.

Received on November 08, 2013

---

---