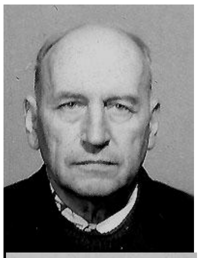
ЛЕСОЭКСПЛУАТАЦИЯ

УДК 539.3:630*31

С.И. Морозов, Д.Н. Шостенко



Морозов Станислав Иванович родился в 1929 г., окончил в 1952 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Архангельского государственного технического университета, член-корреспондент РИА, заслуженный деятель науки и техники РФ. Имеет более 160 печатных работ в области изучения устойчивости температурно-напряженного рельсового пути, закрепления его от угона рельсов, удара тел, применения ЭВМ при решении задач механики.

Шостенко Денис Николаевич родился в 1978 г., окончил в 2000 г. Архангельский государственный технический университет, аспирант кафедры теоретической механики АГТУ. Имеет 1 печатную работу в области теории удара.

СВЯЗЬ МЕЖДУ КЛАССИЧЕСКОЙ И КОНТАКТНОЙ ТЕОРИЯМИ УДАРА

Дан вывод дифференциальных уравнений для решения задач удара с помощью контактной теории при соударении плоских свободных тел. Показана связь этих уравнений с расчетными зависимостями классической теории.

удар, силовая функция, сила удара, импульс ударной силы.

Как отмечено ранее [3], явление удара широко встречается в технике для различных производственных процессов. Оно требует дальнейшего как экспериментального, так и теоретического развития. В работе [4] рассмотрен способ обработки опытных данных при определении параметров силовых функций, а в работе [7] – получена теоретическая зависимость между коэффициентом восстановления ε и параметрами силовой функции.

В данной статье приведены материалы теоретических исследований по определению связи между расчетными зависимостями в контактной и классической теориях удара.

1. Формулировка задачи.

На рис.1 показана схема соударения двух плоских свободных тел. Тело *1* – ударяющее. Оно имеет массу m_1 и движется до удара со скоростями

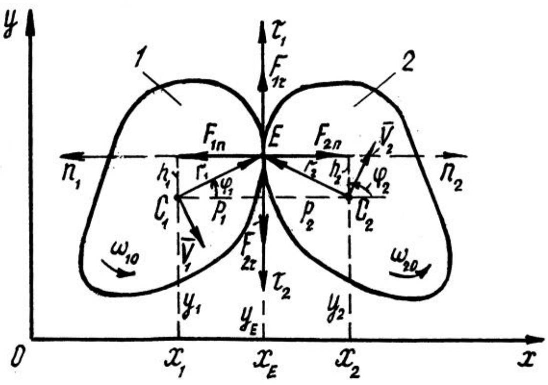


Рис. 1.

v_1 и ω_{10}. Тело *2* – ударяемое, его масса m_2, скорости v_2 и ω_{20}. Оба тела считаем абсолютно твердыми, а упругая (деформирующаяся) связь существует в точке соударения E.

Систему координат $x0y$ будем называть общей. В ней рассматриваем движение тел до и после удара. Положение центров масс тел (точки C_1 и C_2) определяем координатами x_1, y_1 и x_2, y_2.

Положение точки E для первого тела определяется координатами x_{1E}, y_{1E}, для второго x_{2E}, y_{2E}. На рис. 1 обе точки обозначены одной буквой E, но на самом деле они отличаются друг от друга на величину α по оси x и на величину β – по оси y (вследствие деформаций тел).

Системы координат $\tau_1 E n_1$ и $\tau_2 E n_2$ будем называть частными. Начало их совпадает с точкой E. Оси n_1 и n_2 направляем по нормали к поверхности тел в точке соударения параллельно оси x, оси τ_1 и τ_2 направлены по касательной параллельно оси y.

Обе эти частные системы координат являются правосторонними. Положение точек C_1 и C_2 будем обозначать координатами p_1, h_1 для первого тела, p_2, h_2 – для второго. На рис. 1 изображены радиусы-векторы точки E, которые проведены из точек C_1 и C_2. Наклон их к оси x обозначим углами φ_1 и φ_2, которые откладываем от линий, параллельных оси x, против часовой стрелки.

Из рис.1 находим

$$p_1 = r_1 \cos\varphi_1;\ h_1 = r_1 \sin\varphi_1;$$
$$p_2 = r_2 \cos\varphi_2;\ h_2 = r_2 \sin\varphi_2. \tag{1}$$

Деформируемую связь в точке E можно выразить двумя способами. В классической теории ее характеризуют, по предложению И. Ньютона, кинематически с помощью уравнения

$$\bar{u}_{1E}\bar{n}_1 + \bar{u}_{2E}\bar{n}_2 = -\varepsilon(\bar{v}_{1E}\bar{n}_1 + \bar{v}_{2E}\bar{n}_2), \tag{2}$$

где v_{1E}, v_{2E} – скорости движения точки E для первого и второго тел до удара;
u_{1E}, u_{2E} – то же после удара;

ε – коэффициент восстановления;

$\bar{n}_1, \bar{n}_2$ – орты осей n_1, n_2.

В контактной теории, по предложению Г. Герца, эту связь характеризуют с помощью силовой функции. В общем случае при соударении упругопластичных тел она имеет вид [1, 2]

$$F_n = B\alpha^n, \tag{3}$$

где F_n – нормальная сила удара;

α – деформация тел в точке E по нормальным осям n_1 и n_2;

B – коэффициент пластичности;

n – коэффициент нелинейности.

2. Расчетные уравнения для классической теории удара. Они приведены в работах [3, 5] и имеют вид

$$S_nG + S_\tau H + (1 + \varepsilon)A_1 = 0; \tag{4а}$$

$$S_nH + S_\tau G_1 + A_2 = 0, \tag{4б}$$

где S_n, S_τ – импульсы нормальных и касательных сил удара;

G, G_1, H – инерциальные коэффициенты,

$$G = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{h_1^2}{J_1} + \frac{h_2^2}{J_2};$$

$$G_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{p_1^2}{J_1} + \frac{p_2^2}{J_2}; \tag{5}$$

$$H = \frac{p_1h_1}{J_1} + \frac{p_2h_2}{J_2},$$

где J_1, J_2 – моменты инерции тел относительно их центров масс;

A_1, A_2 – скоростные коэффициенты,

$$A_1 = \bar{v}_1\bar{n}_1 + \bar{v}_2\bar{n}_2 + \omega_1h_1 + \omega_2h_2;$$

$$A_2 = \bar{v}_1\bar{\tau}_1 + \bar{v}_2\bar{\tau}_2 + \omega_1p_1 + \omega_2p_2. \tag{6}$$

Основным недостатком классической теории является то, что она не позволяет найти максимальные значения ударных сил F_n и F_τ, время соударения t и максимальные деформации тел α и β в точке соударения тел.

3. Расчетные уравнения для контактной теории удара. Решение этой задачи разобьем на несколько этапов:

а) Найдем геометрические и кинематические соотношения.

Запишем уравнения, связывающие координаты точек C_1, C_2 и E:

$$x_{1E} = x_1 + r_1\cos\varphi_1; \quad y_{1E} = y_1 + r_1\sin\varphi_1;$$
$$x_{2E} = x_2 + r_2\cos\varphi_2; \quad y_{2E} = y_2 + r_2\sin\varphi_2. \tag{7}$$

Продифференцируем уравнения (7) по времени и получим уравнения, связывающие скорости этих же точек:

$$\dot{x}_{1E} = \dot{x}_1 - r_1\omega_1 \sin\varphi_1; \;\; \dot{y}_{1E} = \dot{y}_1 + r_1\omega_1 \cos\varphi_1;$$
$$\dot{x}_{2E} = \dot{x}_2 - r_2\omega_2 \sin\varphi_2; \;\; \dot{y}_{2E} = \dot{y}_2 + r_2\omega_2 \cos\varphi_2. \qquad (8)$$

Еще раз дифференцируем уравнения (8) по времени и получим уравнения для ускорений:

$$\ddot{x}_{1E} = \ddot{x}_1 - r_1\varepsilon_1 \sin\varphi_1 - r_1\omega_1^2 \cos\varphi_1;$$
$$\ddot{x}_{2E} = \ddot{x}_2 - r_2\varepsilon_2 \sin\varphi_2 - r_2\omega_2^2 \cos\varphi_2; \qquad (9)$$
$$\ddot{y}_{1E} = \ddot{y}_1 + r_1\varepsilon_1 \cos\varphi_1 - r_1\omega_1^2 \sin\varphi_1;$$
$$\ddot{y}_{2E} = \ddot{y}_2 + r_2\varepsilon_2 \cos\varphi_2 - r_2\omega_2^2 \sin\varphi_2.$$

Дальнейшее преобразование выполним с помощью системы уравнений (1). Получим следующие выражения:

для скоростей

$$\dot{x}_{1E} = \dot{x}_1 - \omega_1 h_1; \;\; \dot{y}_{1E} = \dot{y}_1 + \omega_1 p_1;$$
$$\dot{x}_{2E} = \dot{x}_2 - \omega_2 h_2; \;\; \dot{y}_{2E} = \dot{y}_2 + \omega_2 p_2; \qquad (10)$$

для ускорений

$$\ddot{x}_{1E} = \ddot{x}_1 - \varepsilon_1 h_1 - \omega_1^2 p_1; \qquad (11а)$$
$$\ddot{x}_{2E} = \ddot{x}_2 - \varepsilon_2 h_2 - \omega_2^2 p_2; \qquad (11б)$$
$$\ddot{y}_{1E} = \ddot{y}_1 + \varepsilon_1 p_1 - \omega_1^2 h_1; \qquad (11в)$$
$$\ddot{y}_{2E} = \ddot{y}_2 + \varepsilon_2 p_2 - \omega_2^2 h_2. \qquad (11г)$$

Вычитаем из (11а) уравнение (11б), а из (11в) уравнение (11г):

$$\ddot{x}_{1E} - \ddot{x}_{2E} = \ddot{x}_1 - \varepsilon_1 h_1 - \omega_1^2 p_1 - \ddot{x}_2 + \varepsilon_2 h_2 + \omega_2^2 p_2;$$
$$\ddot{y}_{1E} - \ddot{y}_{2E} = \ddot{y}_1 + \varepsilon_1 p_1 - \omega_1^2 h_1 - \ddot{y}_2 - \varepsilon_2 p_2 + \omega_2^2 h_2. \qquad (12)$$

Обозначим [5]

$$\ddot{x}_{1E} - \ddot{x}_{2E} = \ddot{\alpha};$$
$$\ddot{y}_{1E} - \ddot{y}_{2E} = \ddot{\beta}, \qquad (13)$$

где α – деформация тел в точке E по осям n, $\alpha = x_{1E} - x_{2E}$;

β – деформация тел в точке E по осям τ, $\beta = y_{1E} - y_{2E}$.

Значит, выражения (12) принимают вид

$$\ddot{\alpha} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 - \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 - \omega_1^2 p_1 + \omega_2^2 p_2; \qquad (14а)$$
$$\ddot{\beta} = \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + \varepsilon_1 p_1 - \varepsilon_2 p_2 - \omega_1^2 h_1 + \omega_2^2 h_2. \qquad (14б)$$

б) Силовые и кинематические соотношения можно выразить двумя способами:

с помощью дифференциальных уравнений движения центров масс:

$$m_1\ddot{x}_1 = -F_n; \quad m_1\ddot{y}_1 = F_\tau;$$
$$m_2\ddot{x}_2 = F_n; \quad m_2\ddot{y}_2 = -F_\tau,$$

отсюда

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{m_1}F_n; \quad \ddot{y}_1 = \frac{1}{m_1}F_\tau;$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}F_n; \quad \ddot{y}_2 = -\frac{1}{m_2}F_\tau, \tag{15}$$

с помощью дифференциальных уравнений вращательного движения тела:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = F_n h_1 + F_\tau p_1;$$
$$J_2\ddot{\varphi}_2 = F_n h_2 + F_\tau p_2. \tag{16}$$

Так как $\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$ и $\ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$, то из уравнений (16) получим

$$\varepsilon_1 = \frac{F_n h_1}{J_1} + \frac{F_\tau p_1}{J_1};$$
$$\varepsilon_2 = \frac{F_n h_2}{J_2} + \frac{F_\tau p_2}{J_2}. \tag{17}$$

Знаки моментов $F_n h$ и $F_\tau p$ определяем в соответствии с расчетной схемой: плюс – при вращении тел вокруг точек C против часовой стрелки, минус – по часовой стрелке.

в) Составим дифференциальные уравнения для соударяющихся тел.

Подставим выражение (17) в уравнения (14а) и (14б):

$$\ddot{\alpha} = -\frac{1}{m_1}F_n - \frac{1}{m_2}F_n - h_1\left(\frac{F_n h_1}{J_1} + \frac{F_\tau p_1}{J_1}\right) - h_2\left(\frac{F_n h_2}{J_2} + \frac{F_\tau p_2}{J_2}\right) - \omega_1^2 p_1 + \omega_2^2 p_2;$$
$$\ddot{\beta} = \frac{1}{m_1}F_\tau - \frac{1}{m_2}F_\tau - p_1\left(\frac{F_n h_1}{J_1} + \frac{F_\tau p_1}{J_1}\right) - p_2\left(\frac{F_n h_2}{J_2} + \frac{F_\tau p_2}{J_2}\right) - \omega_1^2 h_1 + \omega_2^2 h_2.$$

Выполним преобразования, вынося общие множители за скобки:

$$\ddot{\alpha} = -F_n\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{h_1^2}{J_1} + \frac{h_2^2}{J_2}\right) - F_\tau\left(\frac{p_1 h_1}{J_1} + \frac{p_2 h_2}{J_2}\right) - \omega_1^2 p_1 + \omega_2^2 p_2;$$
$$\ddot{\beta} = F_\tau\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{p_1^2}{J_1} + \frac{p_2^2}{J_2}\right) + F_n\left(\frac{p_1 h_1}{J_1} + \frac{p_2 h_2}{J_2}\right) - \omega_1^2 h_1 + \omega_2^2 h_2. \tag{18}$$

Множители, записанные в скобках, встречаются и в классической теории удара (уравнение (5)). Там их называют инерциальными коэффициентами:

$$G = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{h_1^2}{J_1} + \frac{h_2^2}{J_2};$$

$$G_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{p_1^2}{J_1} + \frac{p_2^2}{J_2};$$

$$H = \frac{p_1 h_1}{J_1} + \frac{p_2 h_2}{J_2}.$$

Значит, уравнениям (18) можно придать вид

$$\ddot{\alpha} = -F_n G - F_\tau H - \omega_1^2 p_1 + \omega_2^2 p_2; \qquad (19а)$$

$$\ddot{\beta} = F_\tau H + F_n G_1 - \omega_1^2 h_1 + \omega_2^2 h_2. \qquad (19б)$$

С учетом специфических особенностей между классической и контактной теориями удара уравнения (19а) и (19б) частично совпадают с уравнениями (4а) и (4б), во всяком случае множители для ударных сил и их импульсов.

4. Связь между классической и контактной теориями удара.

Покажем теперь, что такая связь является полной. Рассмотрим, например, уравнение (19а). Умножим его обе части на dt и проинтегрируем:

$$\int \ddot{\alpha} dt = G \int F_n dt + H \int F_\tau dt - \int \omega_1^2 p_1 dt + \int \omega_2^2 p_2 dt + C, \qquad (20а)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Здесь имеем

$$\int \ddot{\alpha} dt = \dot{\alpha}; \quad \int F_n dt = S_n; \quad \int F_\tau dt = S_\tau.$$

Дифференцируя уравнение системы (1) по времени и преобразовывая, получаем

$$\dot{p}_1 = -\omega_1 h_1; \quad \dot{p}_2 = -\omega_2 h_2;$$

$$\dot{h}_1 = \omega_1 p_1; \quad \dot{h}_2 = \omega_2 p_2,$$

отсюда

$$p_1 = -\frac{1}{\omega_1} \dot{h}_1; \qquad p_2 = \frac{1}{\omega_2} \dot{h}_2.$$

Определим с их помощью интегралы:

$$\int \omega_1^2 p_1 dt = \int \omega_1^2 \frac{1}{\omega_1} \dot{h}_1 dt = \omega_1 h_1;$$

$$\int \omega_2^2 p_2 dt = \int \omega_2^2 \frac{1}{\omega_2} \dot{h}_2 dt = \omega_2 h_2.$$

В результате уравнение (19а) принимает вид

$$\dot{\alpha} = S_n G + S_\tau H + \omega_1 h_1 - \omega_2 h_2 + C_1. \qquad (20б)$$

Найдем теперь значения C_1 из нулевых начальных условий: t = 0; $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$; $\omega_1 = \omega_{10}$; $\omega_2 = \omega_{20}$, отсюда

$$C_1 = \dot{\alpha}_0 + \omega_{10} h_1 + \omega_{20} h_2 .$$

Следовательно,

$$\dot{\alpha} = S_n G + S_\tau H + \omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 + \dot{\alpha}_0 + \omega_{10} h_1 + \omega_{20} h_2 . \quad (20в)$$

Перепишем выражение (20в) в векторной форме:

$$S_n G + S_\tau H = \bar{u}_{1E} \bar{n}_1 + \bar{u}_{2E} \bar{n}_2 + \bar{\omega}_1 \bar{h}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{h}_2 - \bar{\text{v}}_{1E} \bar{n}_1 - \bar{\text{v}}_{2E} \bar{n}_2 + \bar{\omega}_{10} \bar{h} + \bar{\omega}_{20} \bar{h}_2 .$$

Преобразуем его, используя уравнение (2):

$$\bar{u}_{1E} \bar{n}_1 + \bar{u}_{2E} \bar{n}_2 = -\varepsilon (\bar{\text{v}}_{1E} \bar{n}_1 + \bar{\text{v}}_{2E} \bar{n}_2) ,$$

и окончательно получим

$$S_n G + S_\tau G + (1+\varepsilon)(\bar{\text{v}}_{1E} \bar{n}_1 - \bar{\text{v}}_{2E} \bar{n}_2 + \bar{\omega}_{10} \bar{h}_1 + \bar{\omega}_{20} \bar{h}_2) = 0 .$$

Последнее выражение в скобках равно A_1, т. е.

$$S_n G + S_\tau H + (1 + \varepsilon) A_1 = 0.$$

Таким образом, преобразовывая уравнение (19а), получаем уравнение (4а). Аналогично из уравнения (19б) можно получить (4б).

Итак, материал статьи доказывает, что классическая и контактная теории удара взаимно связаны [7], что можно использовать при решении задач удара.

4. Проиллюстрируем этот вывод на примере. Расчетная схема приведена на рис. 2. Здесь имеем случай соударения двух тел. Сферическое тело *1* – ударяющее. Оно имеет массу m_1 и радиус R. Центр масс этого тела отстоит от оси симметрии ударяемого тела *2* на расстоянии l. Если l = 0, то имеем случай прямого центрального удара; если $l \neq 0$ – случай внецентренного удара. Тело *2* массой m_2 – поддерживается пружиной *3*. Размеры тела *2* (длина L и толщина B) показаны на рис. 2. Центр масс его лежит на вертикальной оси симметрии.

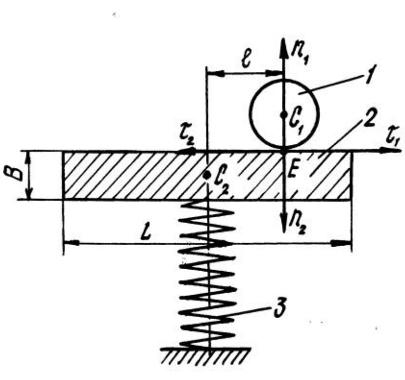


Рис. 2.

Примем: $\text{v}_1 \neq 0$, $\text{v}_2 = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = 0$. Координаты точек C_1 и C_2 равны: $h_1 = 0$, $p_1 = R$, $h_2 = l$, $p_2 = B/2$.

Вычисляем инерциальные коэффициенты:

$$G = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{h_1^2}{J_1} + \frac{h_2^2}{J_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{l^2}{J_2};$$

$$G_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{p_1^2}{J_1} + \frac{p_2^2}{J_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{R^2}{J_1} + \frac{B^2}{4J_2};$$

$$H = \frac{p_1 h_1}{J_1} + \frac{p_2 h_2}{J_2} = \frac{p_1 \cdot 0}{J_1} + \frac{B/2l}{J_2} = \frac{Bl}{2J_2}.$$

С л у ч а й 1. Прямой центральный удар, т. е. $l = 0$:

$$G = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2};$$

$$G_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{R^2}{J_1} + \frac{B^2}{4J_2};$$

$$H = 0.$$

Значит, дифференциальное уравнение (19а) при $F_\tau = 0$ принимает вид

$$\ddot{\alpha} = -F_n G, \tag{21а}$$

решение которого известно. Оно приведено в работе [6].

С л у ч а й 2. Внецентренный удар. Пусть $l = L/2$. Здесь

$$G = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{l^2}{J_1};$$

$$G_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{R^2}{J_1} + \frac{B^2}{4J_2};$$

$$H = \frac{Bl}{2J_2}.$$

Дифференциальные уравнения имеют вид

$$\ddot{\alpha} = -F_n\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{l^2}{J_2}\right) - F_\tau \frac{Bl}{2J_2};$$

$$\ddot{\beta} = F_n \frac{Bl}{2J_2} + F_\tau\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{R^2}{J_1} + \frac{B^2}{4J_2}\right). \tag{21б}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения (21а) и (21б) существенно различаются. Отличие еще больше, если одно или оба тела вращаются до удара, т. е. $\omega_1 \neq 0$ и $\omega_2 \neq 0$.

Анализ связи между классической и контактной теориями удара должен быть продолжен. В частности, требует пояснения величины β, характеризующая касательные перемещения тел по отношению друг к другу. Этот вопрос будет рассмотрен отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Давиденков Н.И.* Проблемы удара в машиностроении. – М.: ОНТИ, 1993. – 115 с.

2. *Динник А.Н.* Удар и сжатие твердых тел // Избр. тр. Т.1. – Киев: АН СССР, 1952. – С. 13–144.

3. *Морозов С.И.* Соударение тел. Классическая теория удара. Ч. 1. – Архангельск: Изд-во АГТУ, 2001. – 252 с.

4. *Морозов С.И.* Экспериментальное определение параметров силовой функции // Лесн. журн. – 2001. – № 3. – С. 57–63. – (Изв. высш. учеб. заведений).

5. *Морозов С.И., Морозов В.С.* Классическая теория удара: Конспект лекций по соударению плоских тел. – Архангельск: Изд-во АГТУ, 1999. – 45 с.

6. *Морозов С.И., Попов М.В.* Контактная теория удара: Конспект лекций по элементарной теории. – Архангельск: Изд-во АГТУ, 1999. – 42 с.

7. *Морозов С.И., Шостенко Д.Н.* Уравнение связи для решения задач удара // Лесн. журн. – 2002. – № 1. – С. 56 – (Изв. высших учеб. заведений).

Архангельский государственный
технический университет

Поступила 12.04.02

S.I. Morozov, D.N. Shostenko

Relation between Classical and Contact Theories of Impact

The derivation of differential equations is presented for solving problems of impact at collision of flat free bodies based on the contact theory. The relation of these equations with estimated dependencies of the classical theory is shown.