

УДК 674.047

Я.И. Соколовский, М.В. Дендюк, Б.П. Поберейко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННО-РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СУШКЕ ДРЕВЕСИНЫ

Предложена математическая модель определения напряженно-деформационного состояния древесины при сушке с учетом ее вязкоупругих свойств и анизотропии.

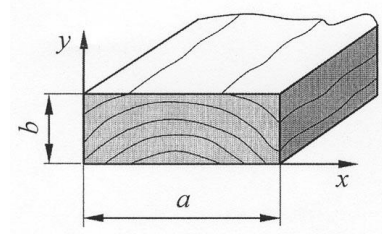
Ключевые слова: древесина, сушка, влагосодержание, вязкоупругость, напряженно-деформационное состояние, метод конечных элементов.

Актуальность исследований. Разработка новых и усовершенствование существующих прогрессивных технологий сушки древесины остро ставит проблему разработки универсальных методов синтеза и анализа деформационно-релаксационных и тепломассообменных полей. Значительные по величине напряжения – это основной сдерживающий фактор для интенсификации процесса сушки. Решение данной проблемы затруднено, так как древесина относится к классу физически нелинейных гидрофильных полимеров, которые характеризуются значительной изменчивостью структурных и физико-механических свойств.

Анализ известных исследований. Реологическое поведение древесины в процессе сушки рассмотрено в большом количестве работ теоретического и экспериментального характера, обширный анализ которых приведен в работе [11]. Напряжения и деформации, возникающие в высушиваемой древесине, проанализированы на расчетных стержневых одноосных моделях [6, 10, 12] с учетом зависимости модуля упругости древесины от влаги. Числовые методы позволяют решить плоскую задачу напряженно-деформационного состояния пиломатериалов при сушке [4, 12]. Такие же задачи, только с учетом анизотропии механических свойств материала, рассмотрены в работах [8, 15, 22]. В работах [20, 21] использован характерный подход, связанный с существованием особого механизма создания механико-сорбционной ползучести и выявленного для условий циклического изменения влажности нагруженной древесины. Особенности деформирования древесины с учетом ее вязкоупругих свойств в рамках одномерной задачи изучены в работах [8–10, 17]. Взаимосвязь деформационно-релаксационных и тепломассообменных процессов рассмотрена в [7].

В данной работе методом конечных элементов (МКЭ) рассмотрено напряженно-деформационное состояние высушиваемой древесины как двухмерного анизотропного материала с учетом его реологических свойств. Здесь проведено обобщение МКЭ для определения напряжений в вязкоупругой области деформирования двухмерного анизотропного материала. Данные результаты явились продолжением исследований [16, 19], в которых

Рис. 1. Схема для постановки задачи



с помощью МКЭ рассматривали нестационарное температурно-влажностное поле древесины с учетом анизотропии теплофизических свойств материала.

Постановка задачи и математическая модель. Определение напряженно-деформационного состояния древесины в процессе сушки базируется на моделировании связи деформационно-релаксационных и массообменных процессов с использованием общих положений термодинамики необратимых процессов и методов механики сплошной среды. Для двухмерной задачи (рис. 1) связь между компонентами напряжений $\sigma(t)$ и деформаций $\varepsilon(t)$ выражают интегральными уравнениями наследственной теории Больцмана–Вольтерры [3]:

$$\sigma_{11}(t) = C_{1111}\varepsilon'_{11} - C_{1111}\int_0^t R_{1111}(t-\tau)\varepsilon'_{11}(\tau)d\tau + C_{1122}\varepsilon'_{22} - C_{1122}\int_0^t R_{1122}(t-\tau)\varepsilon'_{22}(\tau)d\tau; (1)$$

$$\sigma_{22}(t) = C_{2211}\varepsilon'_{11} - C_{2211}\int_0^t R_{2211}(t-\tau)\varepsilon'_{11}(\tau)d\tau + C_{2222}\varepsilon'_{22} - C_{2222}\int_0^t R_{2222}(t-\tau)\varepsilon'_{22}(\tau)d\tau; (2)$$

$$\sigma_{12}(t) = 2C_{1212}\varepsilon'_{12} - 2C_{1212}\int_0^t R_{1212}(t-\tau)\varepsilon'_{12}(\tau)d\tau, (3)$$

где σ_{ij} – компоненты напряжений;

ε'_{ij} – компоненты тензоров деформаций, вызванные изменением влаги в материале;

$R(t-\tau)$ – ядра релаксации;

C – компоненты тензоров упругих постоянных,

$$C_{1111} = \frac{E_{1111}}{1-\nu_1\nu_2}; C_{1122} = C_{2211} = \frac{\nu_1 E_{2222}}{1-\nu_1\nu_2}; C_{2222} = \frac{E_{2222}}{1-\nu_1\nu_2}; 2C_{1212} = \mu;$$

μ – модуль сдвига;

E – модуль упругости;

ν – коэффициент Пуассона.

Общепринятая формулировка МКЭ [2, 5] предполагает отыскание поля перемещений и связана с минимизацией потенциальной энергии системы на основе расчета узловых значений вектора перемещений. После того, как перемещения будут определены, рассчитывают компоненты тензоров деформаций $\{\varepsilon\}$ и напряжений $\{G\}$.

Энергию деформации бесконечно малого объема dV определяют по формуле

$$d\Lambda = \frac{1}{2} \left[\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\} \right],$$

где T – операция транспонирования.

Полную энергию деформации получают интегрированием по объему тела:

$$\Lambda = \int_V \frac{1}{2} \left[\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\} \right] dV. \quad (4)$$

Компоненты тензора деформаций $\{\varepsilon_0\}$, вызванные усадкой материала при удалении влаги в процессе сушки с учетом анизотропии, определяют из следующей зависимости [10, 12]:

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{K_\beta\}^T \Delta U, \quad (5)$$

где $\{K_\beta\}^T = [K_{\beta_{11}} \quad K_{\beta_{22}} \quad 0]$ – коэффициенты тензора усадки в направлениях осей анизотропии;

ΔU – изменение влагосодержания U за промежуток времени $\Delta\tau$.

Для описания нестационарного влагопереноса в процессе сушки древесины на этапе удаления связанной влаги используют уравнение [13] с граничными условиями 3-го рода $U = U_B(S)$, $\alpha \frac{\partial U}{\partial n} = \beta(U_\Pi - U_R)$ и начальным условием $U|_{\tau=0} = U_0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (6)$$

где

$U_B(S)$ – влагосодержание на поверхности, которое может быть функцией координат;

n – внешняя нормаль;

β – коэффициент теплоотдачи, м/с²;

U_Π и U_R – влагосодержание на поверхности и равновесное.

α_x, α_y – коэффициенты теплопроводности вдоль осей анизотропии, м/с².

В процессе сушки начальное распределение влаги U_0 принимают равномерным ($U_0 = \text{const}$), на этапе регулярного процесса (критерий Фурье $F_0 = 0,1$) – параболическим:

$$U|_{F_0=0,1} = U_\Pi - \left[1 - \left(\frac{x-a/2}{a/2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{y-b/2}{b/2} \right)^2 \right] (U_\Pi - U_\Pi),$$

где U_Π – влагосодержание в центре пиломатериала.

Обобщение метода конечных элементов на вязкоупругую область деформирования древесины и числовая реализация. Для определения вязкоупругих компонент деформаций используем закон Больцмана–Вольтерры

(1)-(3) в матричном виде с учетом реологического поведения древесины в процессе сушки:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon_0\} - [D]\{\varepsilon\} - [D_1]\{\varepsilon_{01}\} + [D_1]\{\varepsilon_1\} - [D_2]\{\varepsilon_{02}\} + [D_2]\{\varepsilon_2\}, \quad (7)$$

где

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{1212} \end{bmatrix}; \quad [D_1] = \begin{bmatrix} C_{1111} & 0 & 0 \\ 0 & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{1212} \end{bmatrix};$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 0 & C_{1122} & 0 \\ C_{2211} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{011} \\ \varepsilon_{022} \\ \varepsilon_{012} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix};$$

$$\{\varepsilon_{01}\} = \begin{Bmatrix} \int_0^t R_{1111}(t-\tau)\varepsilon_{011}(\tau)d\tau \\ \int_0^t R_{2222}(t-\tau)\varepsilon_{022}(\tau)d\tau \\ \int_0^t R_{1212}(t-\tau)\varepsilon_{012}(\tau)d\tau \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon_{02}\} = \begin{Bmatrix} \int_0^t R_{2211}(t-\tau)\varepsilon_{011}(\tau)d\tau \\ \int_0^t R_{1122}(t-\tau)\varepsilon_{022}(\tau)d\tau \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{\varepsilon_1\} = \begin{Bmatrix} \int_0^t R_{1111}(t-\tau)\varepsilon_{11}(\tau)d\tau \\ \int_0^t R_{2222}(t-\tau)\varepsilon_{22}(\tau)d\tau \\ \int_0^t R_{1212}(t-\tau)\varepsilon_{12}(\tau)d\tau \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon_2\} = \begin{Bmatrix} \int_0^t R_{2211}(t-\tau)\varepsilon_{11}(\tau)d\tau \\ \int_0^t R_{1122}(t-\tau)\varepsilon_{22}(\tau)d\tau \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Для определения критериев выбора ядра релаксации $R(t-\tau)$ необходимо исходить из специфических особенностей реологического поведения древесины под действием постоянной механической нагрузки в разных стационарных температурно-влажностных условиях. Исходя из исследований [8, 9, 18], выбираем ядро реологического поведения древесины:

$$R(t-\tau) = \aleph e^{-\mu(t-\tau)},$$

где \aleph, μ – реологические параметры ядра, которые определяют экспериментально [10, 18] по методике [14].

Для определения остаточной деформации ядро $R(t-\tau)$ может быть представлено в виде $R(t-\tau) = \varphi_1(t)\varphi_2(\tau)$ при $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_1(t) \neq 0$.

Запишем ядро $R(t)$ через узловые значения по времени t_j , применив метод квадратур [1]:

$$\int_0^t R(t-\tau)\varepsilon_0(\tau)d\tau = \int_0^{t_i} \aleph e^{-\mu(t_i-\tau)}\varepsilon_0(\tau)d\tau = e^{-\mu t_i} \sum_{j=1}^{i-1} A_j \aleph(t_j) \varepsilon_0(t_j) e^{\mu_j t_j},$$

где A_j – коэффициенты в узлах j , $A_j = 1,0$ – для постоянного шага интегрирования при $1 < j < i$, $A_j = 0,5$ – в остальных случаях.

Полная потенциальная энергия, согласно концепции МКЭ,

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \Lambda^{(e)}, \quad (8)$$

где E – общее количество элементов;

$\Lambda^{(e)}$ – энергия деформации e -го элемента, которую определяют с учетом (4), (5) и (7).

Для того, чтобы минимизировать величину Π , продифференцируем выражение (8) по $\{L\}$, приравняем к нулю и запишем в векторно-матричной форме:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{L\}} = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \{L\} + \{f^{(e)}\} = 0,$$

где

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} = & - \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\epsilon_0^{(e)}\} dV + \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} [B^{(e)}]^T [D_1^{(e)}] \{\epsilon_{01}^{(e)}\} dV - \\ & - \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} [B^{(e)}]^T [D_1^{(e)}] \{\epsilon_1^{(e)}\} dV + \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} [B^{(e)}]^T [D_2^{(e)}] \{\epsilon_{02}^{(e)}\} dV - \\ & - \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} [B^{(e)}]^T [D_2^{(e)}] \{\epsilon_2^{(e)}\} dV; \end{aligned} \quad (10)$$

$$[B] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ \frac{c_i}{2} & \frac{b_i}{2} & \frac{c_j}{2} & \frac{b_j}{2} & \frac{c_k}{2} & \frac{b_k}{2} \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} b_i = (y_j - y_k) \\ c_i = (x_k - x_j) \end{cases}; \quad \begin{cases} b_j = (y_k - y_i) \\ c_j = (x_i - x_k) \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_k = (y_i - y_j) \\ c_k = (x_j - x_i) \end{cases};$$

S – площадь конечного e -го элемента;

(x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) – соответственно координаты узлов i, j, k , в данном случае, треугольного симплекс-элемента.

Для определения матриц деформаций в (10) необходимо знать распределение влаги в каждой точке сечения. Таким образом, перед тем, как рассчитывать поле перемещений, необходимо решить дифференциальное уравнение (6) в частных производных с системой граничных и начальных условий.

С вариационной точки зрения, решение (6) эквивалентно нахождению минимума функционала

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[\alpha_x \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial \tau} U \right] dV + \int_{S_2} \frac{\beta}{2} (U - U_R)^2 dS .$$

Продифференцировав слагаемые функционала для каждого элемента при узловых значениях влагосодержания и приравняв результат к нулю, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка для определения $\{U\}$:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}] \{U\} + [c^{(e)}] \frac{\partial \{U\}}{\partial \tau} + \{f^{(e)}\} = 0, \quad (11)$$

где

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B_U^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B_U^{(e)}] dV + \int_{S_2^{(e)}} \beta [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS; \quad (12)$$

$$[c^{(e)}] = \int_V [N]^T [N] dV; \{f^{(e)}\} = - \int_{S_2^{(e)}} \beta U_R [N^{(e)}]^T dS; [B_U] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}. \quad (13)$$

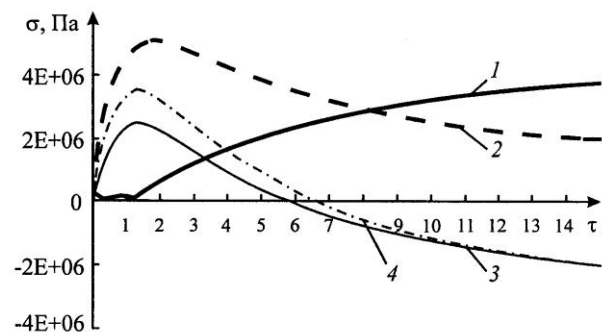
Матрицы $[K]$, $[C]$ и $\{F\}$, элементы которых описаны соотношениями (12), (13), определяют матрицы влагопроводности, демпфирования и нагрузки. Все интегралы в формулах (12), (13) взяты по отдельным элементам, а суммирование их вкладов проведено методом прямой жесткости [12].

В конечном итоге, для решения дифференциального уравнения (11) получена система уравнений:

$$[A] \{U\}_{\text{нов}} = [P] \{U\}_{\text{стар}} - \{F\}; A = [K] + \frac{2}{\Delta \tau} [C]; P = \frac{2}{\Delta \tau} [C].$$

Матрица $[A]$ есть комбинация матриц $[C]$ и $[K]$, она зависит от шага во времени $\Delta \tau$. Если $\Delta \tau$ не изменяется и теплофизические параметры древесины не зависят от $\{U\}$, тогда значения элементов матрицы $[A]$ во все моменты времени постоянны. Если $\Delta \tau$ или параметры материала изменяются в процессе решения, тогда матрицу $[A]$ необходимо каждый раз вычислять заново. Эта процедура значительно увеличивает объем вычислений, но она необходима при переменном $\Delta \tau$ или в случае, когда α_x , α_y и другие свойства древесины являются функциями влажности.

Рис. 2. Изменение напряжений σ_{xx} для разных точек сечения ($y = b/2$): 1 – $x = a/8$; 2 – $x = a/4$; 3 – $x = 3a/8$; 4 – $x = a/2$



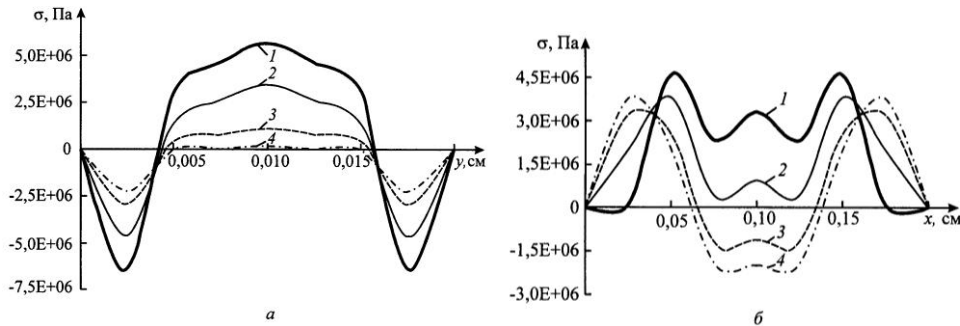


Рис. 3. Распределение напряжений σ_{yy} вдоль толщины при $x = a/2$ (а) и напряжений σ_{xx} вдоль ширины при $y = b/2$ (б) для различных моментов времени сушки: 1 – 1 ч; 2 – 5; 3 – 10; 4 – 15 ч

Результаты исследований. Расчеты для тангенциальных сосновых досок размером сечения $a \times b = 20 \times 2$ см, $E_1 = 670$ МПа, $E_2 = 550$ МПа, $\mu = 484$ МПа, $\nu = 0,38$, $\beta_x = \beta_y = 0,0023$, высушиваемых в условиях постоянного технологического режима (температура агента сушки $t_c = 88$ °С; относительная влажность $\varphi = 30$ %; коэффициенты: влагопроводности $\alpha_x = 1,8 \cdot 10^{-9}$ м/с, $\alpha_y = 2,25 \cdot 10^{-9}$ м/с, влагообмена $b_x = b_y = 3,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с), проведены в течение 15 ч с постоянным шагом $\Delta t = 3$ мин.

Численный алгоритм реализован с применением объектно-ориентированного программирования. На основании проведенного численного эксперимента исследовано влияние гигроскопической влажности, анизотропии теплофизических свойств и геометрических размеров пиломатериалов на распределение плоского напряженно-деформационного состояния древесины. На рис. 2, 3 приведены графические зависимости изменения нормальных напряжений σ_x и σ_y от времени в разных точках пиломатериалов.

Таким образом, полученные результаты позволяют судить о достаточно сложном характере изменения напряжений в высушиваемой древесине с учетом ее реологических свойств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы [Текст] / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
3. Кристинсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости [Текст] / Р. Кристинсен. – М.: Мир, 1974. – 268 с.
4. Лапшин, Ю.Г. Некоторые задачи деформирования материалов при переменной температуре и влажности [Текст] / Ю.Г. Лапшин // Лесн. журн. – 1970. – № 1. – С. 156–159. – (Изв. высш. учеб. заведений).
5. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 394 с.

6. *Серговский, П.С.* О методе расчета внутренних напряжений при сушке [Текст] / П.С. Серговский, Б.Н. Уголев, Н.В. Скуратов // Науч. тр. / МЛТИ. – 1981. – Вып. 117.
7. *Соколовский, Я.И.* Взаимосвязь деформационно-релаксационных и теплообменных процессов при сушке капиллярно-пористых тел [Текст] / Я.И. Соколовский // Прикладная механика. – 1998. – 34, № 9. – С. 101–107.
8. *Соколовский, Я.И.* Идентификация и способ контроля напряженно-деформируемого состояния древесины в процессе сушки [Текст] / Я.И. Соколовский, Б.П. Поберейко // Структура, свойства и качество древесины – 2000: тр. 3-го Междунар. симп. – Петрозаводск, 2000. – С. 284–287.
9. *Соколовский, Я.И.* Расчет нестационарных напряжений в древесине при воздействии влаги [Текст] / Я.И. Соколовский, Б.П. Поберейко // Лесн. журн. – 2000. – № 1. – С. 99–105. – (Изв. высш. учеб. заведений).
10. *Уголев, Б.Н.* Деформативность древесины и напряжения при сушке [Текст] / Б.Н. Уголев. – М.: Лесн. пром-сть, 1971. – 174 с.
11. *Уголев, Б.Н.* История и перспективы развития исследований сушильных напряжений в древесине [Текст] / Б.Н. Уголев // Структура, свойства и качество древесины – 96: тр. 2-го Междунар. симп. – Москва–Мытищи, 1996. – С. 230–238.
12. *Уголев, Б.Н.* Контроль напряжений при сушке древесины [Текст] / Б.Н. Уголев, Ю.Г. Лапшин, Е.В. Кротов. – М.: Лесн. пром-сть, 1980. – 208 с.
13. *Шубин, Г.С.* Сушка и тепловая обработка древесины [Текст] / Г.С. Шубин. – М.: Лесн. пром-сть, 1990. – 236 с.
14. *Поберейко, Б.П.* Методика визначення параметрів кривих повзучості деревини [Текст] / Б.П. Поберейко // Наук. вісник / УкрДЛТУ. – 1998. – Вип. 8.1. – С. 232–236.
15. *Соколовський, Я.І.* Дослідження плоского напружено-деформативного стану деревини в процесі сушіння [Текст] / Я.І. Соколовський // Наук. вісник / УкрДЛТУ. – 1997. – Вип. 8. – С. 161–168.
16. *Соколовський, Я.І.* Застосування методу кінцевих елементів для розрахунку нестационарних полів вологоперенесення у висушуваній деревині [Текст] / Я.І. Соколовський, М.В. Дендюк, Б.П. Поберейко // Лісове госп-во, лісова, паперова і д/о промисловість: зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С. 100–106.
17. *Соколовський, Я.І.* Напруження і деформації у деревині в процесі сушіння [Текст] / Я.І. Соколовський // Наук. вісник / УкрДЛТУ. – 2002. – Вип. 12.5. – С. 92–102.
18. *Соколовський, Я.І.* Результати експериментальних досліджень оберненої повзучості та складових деформацій деревині впоперек волокон [Текст] / Я.І. Соколовський, М.В. Дендюк // Лісове госп-во, лісова, паперова і д/о пром-сть. – 2002. – Вип. 27. – С. 73–77.
19. *Соколовський, Я.І.* Розрахунок анізотропних нестационарних температурно-вологісних полів у висушуваній деревині методом скінчених елементів [Текст] / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець // Лісове госп-во, лісова, паперова і д/о пром-сть: зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ, 2004. – Вип. 29. – С. 109–117.
20. *Ranta-Maunus, A.* Impact of mechanosorption creep to the long-term strength of timber [Текст] / A. Ranta-Maunus // Holz als Roh-und Werkstoff. – 1990. – N 48. – P. 67–71.

21. *Ranta-Maunus, A.* Rheological behaviour of wood in directions perpendicular to the grain [Текст] / A. Ranta-Maunus // Materials and structures. – 1993. – N 26. – P. 362–369.

22. *Sigurdur, O.* Two-dimensional simulation of wood deformation during graying [Текст] / O. Sigurdur, D. Ola. – Report TVSM-7086. – Sweden: Lund University of technology, 1994. – 34 p.

Украинский государственный
лесотехнический университет

Поступила 8.12.04

Ya.I. Sokolovsky, M.V. Dendyuk, B.P. Poberejko

**Simulation of Deformational-and-relaxation Processes
in Wood Drying**

The mathematical model is proposed for determining the deformation state of wood in drying taking into account its viscoelasticity and anisotropy.
