

УДК 531.132.2

С.А. Борисевич

Белорусский государственный технологический университет

Борисевич Сергей Анатольевич родился в 1979 г., окончил в 2001 г. Белорусский государственный технологический университет, ассистент кафедры теоретической механики БелГТУ. Имеет более 10 печатных работ в области исследования динамических моделей деревьев.

E-mail: borsera@mail.ru



ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ДЕРЕВА

Предложена модель дерева, учитывающая гибкость ствола при свободном падении и взаимодействии с упругим основанием, представляющая цепочку жестких стержней, соединенных упругими связями.

Ключевые слова: ствол дерева, гибкость, численная модель, уравнения Лагранжа, упругое основание.

Исследование влияния гибкости падающего дерева на его динамическое поведение имеет важное практическое значение, позволяя прогнозировать характер взаимодействия ствола дерева с лесной машиной, ударный импульс, производимый стволом на основание и лесную машину. Точное решение задач о движении деформируемых систем удастся получить в замкнутой форме лишь в немногих относительно простых случаях. В основном же это сделать невозможно, и приходится упрощать расчетную модель, в частности уменьшая число степеней свободы [5].

Одним из примеров является модель ствола дерева, представляющая собой набор дискретных масс, соединенных при помощи безынерционных жестких стержней. Последние могут поворачиваться относительно друг друга (рис. 1, *а*), и распределенная по длине ствола податливость локализуется в конечном числе точек. Подобные двух-, трех- и четырехмассовые модели широко используются в практике проектирования лесных машин [3] и, как правило, применяются для исследования малых колебаний ствола дерева около положения его равновесия. Другим примером служит модель ствола дерева в виде цепочки жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами (рис. 1, *б*) [1]. Звенья представляют собой цилиндры, диаметры которых

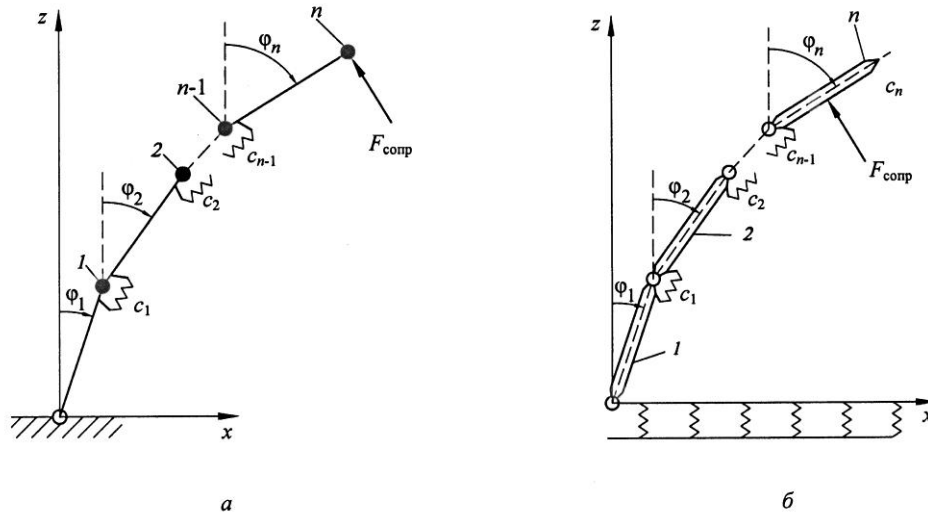


Рис. 1. Расчетные модели дерева: *а* – дискретно-массовая; *б* – стержневая и упругое основание модели Винклера

меняются от основания ствола к вершине. Численные модели, представленные на рис. 1, называемые «bead-chain model» и «rod-chain model» соответственно, давно известны и широко используются при изучении динамики длинных гибких нитей в потоке жидкости [8].

В настоящей работе исследуется второй вариант модели (рис. 1, *б*), для которой представлен численный метод расчета и выполнено компьютерное моделирование механического поведения при свободном падении и взаимодействии с упругим основанием. Сила сопротивления воздуха, действующая на крону дерева, полагается линейной по скорости и приложенной к нескольким последним стержням модели в соответствии с расположением кроны дерева. Ось вращения первого от основания стержня проходит через кромку среза, т. е. сбрасывание дерева с пня не происходит.

Уравнения движения. В качестве обобщенных координат выберем углы поворота стержней (φ_i), отсчитываемые от вертикали (рис. 1, *б*). Считаем, что движение происходит в одной плоскости. Координаты центров тяжести стержней находим из выражений

$$\begin{cases} x_{Ck} = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \sin \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \sin \varphi_k \\ z_{Ck} = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \cos \varphi_i + \frac{1}{2} l_k \cos \varphi_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где l_i – длина i -го стержня;

n – число звеньев.

Скорость центров масс стержней определяем следующим образом:

$$v_{Ck}^2 = \dot{x}_{Ck}^2 + \dot{z}_{Ck}^2.$$

Кинетическую энергию рассматриваемой системы находим по формуле

$$T = \sum_{k=1}^n \left(\frac{m_k v_{Ck}^2}{2} + \frac{J_k \dot{\varphi}_k^2}{2} \right),$$

где m_k – масса k -го стержня;

J_k – динамический центральный осевой момент инерции k -го стержня,

для цилиндра $J_k = m_k \left(\frac{d_k^2}{12} + d_k^2 / 16 \right)$, d_k – диаметр k -го стержня.

Потенциальная энергия системы состоит из энергии в поле сил тяжести и энергии упругих связей:

$$П = \sum_{k=2}^n \frac{c_k}{2} (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^n g m_k z_{Ck}, \quad (2)$$

где c_k – жесткость упругих связей.

Для определения коэффициентов жесткости сочленений рассмотрим закон Гука при чистом изгибе:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E J_A}, \quad (3)$$

где $1/\rho$ – кривизна упругой линии в произвольном сечении ствола;

M – изгибающий момент в том же сечении;

E – модуль упругости древесины;

J_A – осевой момент инерции сечения ствола.

При чистом изгибе изгибающий момент постоянен во всех сечениях стержня. Разобьем стержень на конечные элементы, соединенные упругими шарнирами (рис. 2). После деформации конечно-элементной модели стержня его ось будет представлять ломаную линию с вершинами в точках соединения цилиндров. Зависимость между длиной конечного элемента (Δl) и радиусом кривизны окружности (ρ), проведенной через сочленения, примет вид

$$\Delta l = \rho \Delta \varphi. \quad (4)$$

В соответствии с законом Гука изгибающий момент выражаем через коэффициент упругости шарнира (c_φ):

$$M = c_\varphi \Delta \varphi. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (3), получаем

$$c_\varphi = \frac{E J_A}{\Delta l}. \quad (6)$$

Таким образом, коэффициенты жесткости сочленений обратно пропорциональны длине цилиндров, на которые расчленяется стержень, и выражаются простой зависимостью (6) через характеристики ствола дерева.

Примем, что сила сопротивления воздуха, действующая на каждый элемент, пропорциональна первой степени скоростей центров масс стержней $F_k = -\beta v_{Ck}$. При линейной зависимости этих показателей для вычисления обобщенной силы сопротивления удобно ввести диссипативную функцию Релея Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k v_k^2.$$

Тогда обобщенная сила (Q_k), соответствующая силам сопротивления воздуха,

$$Q_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}.$$

Для нескольких последних стержней модели коэффициенты β_i примем отличными от нуля в соответствии с расположением кроны дерева и будем считать, что их значения распределены по треугольному закону с $\beta = 70 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ у основания треугольника и нулевым на верхнем конце ствола.

Дифференциальные уравнения движения модели получим, составив уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, линейную по угловым ускорениям элементов, но нелинейную по обобщенным координатам и скоростям. Систему не приводим ввиду ее громоздкости.

Интегрирование уравнений движения. Полученные уравнения решены численно с помощью пакета Maple 11 при заданных начальных углах отклонения стержней от вертикали и их начальных скоростях. С учетом начальных условий получена система уравнений, линейных относительно старших производных $\ddot{\varphi}_i$. Угловые ускорения из системы находили при помощи метода Ньютона – Рафсона по итерационной формуле [2].

Численное интегрирование уравнений движения производили с помощью модификации базовой схемы Верле, так называемой полшаговой «leap-frog» схемы [7]:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t + \Delta t/2) &= \dot{\varphi}(t - \Delta t/2) + \ddot{\varphi}(t)\Delta t; \\ \varphi(t + \Delta t) &= \varphi(t) + \dot{\varphi}(t + \Delta t/2)\Delta t, \end{aligned}$$

где φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ – векторы соответственно углов поворота, угловых скоростей и угловых ускорений.

Текущие скорости вычисляли по формуле

$$\dot{\varphi}(t) = 0,5(\dot{\varphi}(t + \Delta t/2) + \dot{\varphi}(t - \Delta t/2)).$$

Примем, что диаметр ствола (d) изменяется по линейному закону [4]:

$$d = d_0 - qs, \quad (7)$$

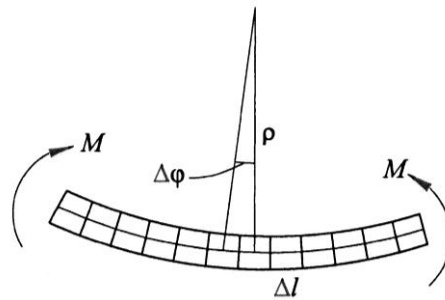


Рис. 2. К определению жесткости пружин

где d_0 – диаметр ствола у основания;

q – коэффициент сбега;

s – дуговая координата, отсчитываемая от основания ствола.

Определим коэффициент сбега следующим образом. Пускай при s , равной длине дерева l , диаметр ствола на вершине будет $d = d_B$, тогда коэффициент сбега

$$q = d_0 - d_B / l. \quad (8)$$

Подставляя (7) в формулу для осевого момента инерции сечения (считая его круглым) и учитывая выражение для коэффициента сбега (8) и для длины звеньев $\Delta l = l/n$, определяем жесткость упругих связей (6):

$$c_k = \frac{EJ_{Ak}}{\Delta l} = \frac{EJ_{A0}}{\Delta l} \left(1 - \left(1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^4, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где J_{A0} – осевой момент инерции сечения у основания ствола.

Проведя аналогичные рассуждения, получим массу звеньев модели:

$$m_{k+1} = m_1 \left(1 - \left(1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^2, \quad k = 0, \dots, n, \quad (10)$$

где m_1 – масса первого от основания цилиндра.

Показатель m_1 найдем из условия

$$m = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_1 \left(1 - \left(1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^2,$$

откуда

$$m_1 = m / \sum_{k=0}^n \left(1 - \left(1 - \frac{d_B}{d_0} \right) \frac{k}{n} \right)^2.$$

где m – масса ствола.

Шаг по времени принимали: при свободном падении $\Delta t = 0,001$ с, при взаимодействии с упругим основанием $\Delta t = 0,0001$ с. Параметры ствола дерева [4]: длина $l = 19$ м, диаметры $d_0 = 24$ см, $d_B = 10$ см, модуль упругости древесины $E = 1,2 \cdot 10^{10}$ Па, плотность $\rho = 780$ кг/м³; массу вычисляли исходя из объема ствола и плотности древесины. В приведенных ниже расчетах ствол дерева разбивали на 20 частей, силу сопротивления прилагали к последним четырем стержням.

Сохранение полной энергии системы при отсутствии сил сопротивления гарантировало устойчивость работы алгоритма.

Свободное падение дерева. Интегрирование дифференциальных уравнений движения проводили при следующих начальных условиях: а) первоначальная осевая линия задана прямой с начальным углом наклона $\varphi_0 = 10^\circ$; б) начальная угловая скорость $\omega_0 = 0,1$ рад/с.

В результате интегрирования уравнений движения можно получить формы осевой линии ствола дерева в процессе его движения. Для некоторых моментов времени они представлены на рис. 3. Как видим, в момент соприкосновения с основанием ось ствола дерева изогнута, что может увеличить производимый при этом импульс. Если силы сопротивления отсутствуют, жесткость ствола не позволяет ему деформироваться, и он движется практически как абсолютно твердое тело.

Взаимодействие падающего дерева с упругим основанием. Примем, что дерево падает на упругое основание, описываемое линейной моделью Винклера без демпфирования, в которой деформации поверхности пропорциональны нагрузке и полностью исчезают при ее снятии [6] (см. рис. 1, б). При касании поверхности основания ($z_{Ck} < 0$) в выражение для потенциальной энергии (2) добавляется дополнительное сла-
4* е, соответствующее потенциальной энергии упругого основания:

$$P^* = P + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_{\text{осн}k} \Delta z_{Ck}^2, \quad (11)$$

где $c_{\text{осн}k}$ – жесткость пружин упругого основания.

В расчетах принято, что стержни модели соприкасаются с пружинами своими центрами масс. Коэффициенты жесткости ($c_{\text{осн}k} = c_{\text{осн}}$) приняты равными $6,5 \cdot 10^5$ Н/м [6].

Формы осевой линии ствола дерева в процессе взаимодействия с упругим основанием представлены на рис. 4, из которого видно, что с увеличением номера соприкасающегося стержня деформации пружин основания сначала нарастают, в средней части ствола уменьшаются практически до нуля, а затем резко возрастают при соприкосновении последних стержней модели. Максимальная деформация пружин вызывается последним стержнем и составляет $\Delta z_C = 0,22$ м. В реальном случае воздействие конца ствола дерева на упругое основание смягчает крона. Это легко учесть, изменяя длину его пружин в месте соприкосновения кроны.

Импульс, произведенный стволом дерева на основание (S), можно вычислить по формуле

$$S = \sum_j \sum_k c_{\text{осн}} \Delta z_{jk} \Delta t, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, t_{\text{вз}}/\Delta t,$$

где Δz_{jk} – деформации основания;

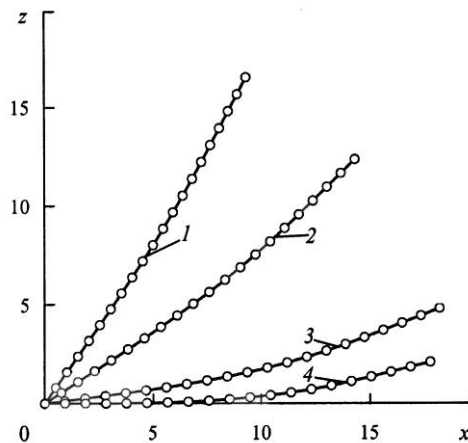
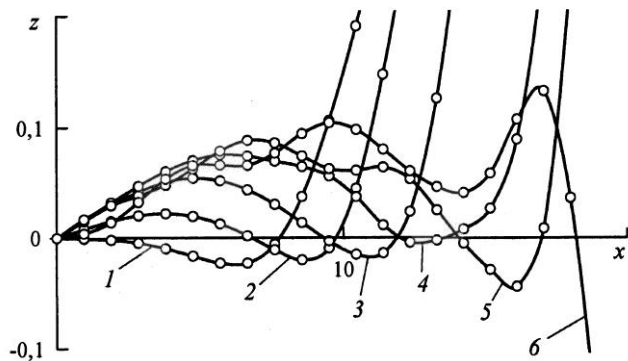


Рис. 3. Упругая линия ствола дерева при падении в различные моменты времени:
1 – $t = 2,3$; 2 – $3,5$; 3 – $4,5$; 4 – $4,8$ с

$t_{вз}$ – продолжительность взаимодействия.

В результате расчетов для жесткого ствола дерева получено $S = 10,720$, для гибкого $S = 8,722$ кН·с. Таким образом, гибкость ствола оказывает значительное влияние на взаимодействие с упругим основанием и приводит к уменьшению импульса, произведенного стволом дерева, почти на 20 %. Полагая в формуле (11) все коэффициенты $c_{оснк}$ кроме одного равными нулю, можно получить модель падения ствола на упругую невесомую опору.

Рис. 4. Упругая линия ствола дерева во время взаимодействия с поверхностью: 1 – $t = 4,35$; 2 – 4,36; 3 – 4,39; 4 – 4,43; 5 – 4,45; 6 – 4,47 с



Таким образом, расчеты показали, что использование рассмотренной модели позволяет учесть гибкость ствола при падении дерева и взаимодействии с упругим основанием, получить характер распределения деформаций ствола и основания. Не представляет труда учесть не только сбег, но и другие особенности дерева.

Автор выражает благодарность проф. В.С. Вихренко за ценные указания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисевич С.А. Конечно-разностная схема для исследования падения ствола дерева // Тр. БГТУ. Сер. II: Лесн. и деревообаб. пром-сть. – 2008. – Вып. 16. – С. 104–107.
2. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
3. Жуков А.В. Теория лесных машин. – Минск: БГТУ, 2001. – 640 с.
4. Коротяев Л.В. Параметры деревьев и хлыстов как объектов лесозаготовительного производства. – Л.: АЛТИ, 1982. – 80 с.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
6. Черкасов И.И. Механические свойства грунтов в дорожном строительстве. – М.: Транспорт, 1976. – 247 с.
7. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. – Oxford.: Clarendon press, 1999. – 385 p.

8. *Gang Wang, Wei Yu, Chixing Zhou*. Optimization of the rod chain model to simulate the motions of a long flexible fiber in simple shear flows // *European Journ. of Mechanics B*. – 2006. – Vol. 25, N 3. – P. 337–347.

Поступила 03.07.09

S.A. Borisevich
Belorussian State Technological University

Numerical Model of Free Tree Fall

The tree model is suggested taking into account the stem flexibility under its free fall and interaction with the elastic base; the model presents the chain of hard bars connected by elastic connections.

Keywords: tree stem, flexibility, numerical model, Lagrange equations, elastic base.
