

УДК 674.053

**И.И. Иванкин**

Иванкин Илья Игоревич родился в 1971 г., окончил в 1994 г. Архангельский лесотехнический институт, кандидат технических наук, доцент кафедры машин и оборудования лесного комплекса Архангельского государственного технического университета. Имеет более 30 печатных работ в области совершенствования лесопильного оборудования и инструмента.



**О ВЫБОРЕ ТИПА ОПОР ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ  
НАЧАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ПОЛОСОВЫХ ПИЛ**

Показано, что при существующих параметрах рамных пил тип опор не оказывает существенного влияния на их начальную жесткость, поэтому ее можно определять по формулам как для шарнирного закрепления концов, так и для закрепления концов в виде заделок.

*Ключевые слова:* начальная жесткость, пила, прогиб, изгиб, кручение, заделка, шарнир.

Режущим инструментом лесопильных рам являются пилы, представляющие собой стальные полосы, на одной из кромок которых насечены зубья.

Производительность рам и качество пиломатериалов в значительной степени зависят от точности пиления. Для повышения этого показателя необходимо, с одной стороны, уменьшать силы, действующие на пилы, с другой – повышать способность пил противодействовать этим силам.

Способность пил противодействовать боковым силам характеризуется их жесткостью. Следует различать три вида жесткости [4]: собственную жесткость ненатянутой пилы  $j_c$ ; начальную жесткость натянутой пилы при отсутствии сил резания  $j_n$ ; рабочую жесткость пилы с учетом сил резания  $j_p$ .

Для определения рабочей жесткости пилы, по которой оценивается точность пиления [3], необходимо знать начальную жесткость пилы. Она показывает, какую боковую силу  $Q$  необходимо приложить к пиле, чтобы отклонить ее в месте приложения силы на 1 мм, т. е.

$$j_n = \frac{Q}{y}, \quad (1)$$

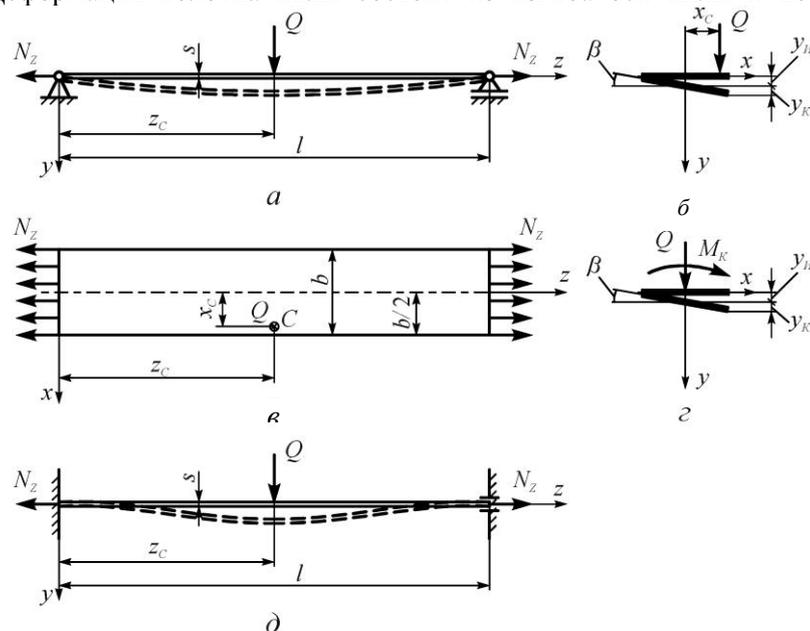
где  $y$  – прогиб пилы.

Из выражения (1) следует, что для определения начальной жесткости необходимо знать величину прогиба  $y$  под действием силы  $Q$ . Перед началом расчета прогиба на стадии разработки расчетной схемы, необходимо выбрать тип опор на концах полосы. Возможны два варианта: первый – опорами являются шарниры (рисунок, а), второй – опоры концов представляют собой заделки (рисунок, б).

Цель данной работы – сравнить два варианта расчетных схем.

Сначала рассмотрим расчетную схему для определения прогибов полосы при шарнирном креплении концов (рисунок, а, в).

Пила, имеющая толщину  $s$ , ширину  $b$  и свободную длину (расстояние между опорами)  $l$ , растянута равномерно распределенной силой  $N_z = N/b$ . Боковая сила  $Q$  приложена в точке  $C$ , имеющей координаты  $x_c$ ,  $y_c$  и  $z_c$ . Деформация полотна пилы состоит из изгиба оси пилы и поворота



Расчетные схемы для определения прогибов полосы сечений вокруг нее (рисунок, б). Для определения прогиба  $y$  воспользуемся энергетическим методом, при этом кривую прогиба полосы представим в виде тригонометрического ряда, удовлетворяющего условиям закрепления на концах [5–8].

Ранее нами [2] с использованием данного метода получена формула для определения прогиба полосы с шарнирным закреплением концов:

$$y = \frac{2Ql}{\pi^2} \left( \frac{l^2}{E J_x \pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2(n^2 + \alpha)} \sin \frac{n\pi z_c}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} + \frac{x_c x}{C + \frac{N b^2}{12}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi z_c}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} \right), \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости материала пилы, МПа;  
 $J_x$  – момент инерции сечения пилы при изгибе, мм<sup>4</sup>,  
 $J_k = bs^3/12$ ;  $\alpha = N l^2 / (E J_x \pi^2)$ ;  
 $C = G J_k$  – жесткость пилы при кручении, Н·мм<sup>2</sup>;  
 $G$  – модуль сдвига материала пилы, МПа;  
 $J_k = bs^3/3$  – момент инерции сечения пилы при кручении, мм<sup>4</sup>.

Рассмотрим случай закрепления концов полосы заделкой (рисунок, *д*). Приведем расчетную схему (рисунок, *б*) к эквивалентной (рисунок, *з*) для деформации изгиба и кручения пилы.

Представим кривую изгиба оси пилы в виде тригонометрического ряда [5–7]:

$$y_{\text{и}} = \frac{a_1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right) + \frac{a_2}{2} \left( 1 - \cos \frac{4\pi z}{l} \right) + \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z}{l} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) удовлетворяет условиям на концах ( $z = 0$ ;  $z = l$ ):

$$y_{\text{и}} = 0 \text{ и } \frac{dy_{\text{и}}}{dz} = 0.$$

Известно, что если упругая система претерпевает малое перемещение, то соответствующее увеличение потенциальной энергии деформации системы равно работе, совершенной внешними силами на этом перемещении [1, 6]. Когда упругая кривая представлена рядом (3), бесконечно малые перемещения можно получить бесконечно малыми вариациями коэффициентов  $a_1, a_2, a_3 \dots$ . Если любому коэффициенту  $a_n$  дать приращение  $da_n$ , то вместо члена  $a_n \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z}{l} \right)$  будем иметь  $(a_n + da_n) \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z}{l} \right)$ , другие члены ряда (3) останутся без изменения.

Это приращение  $da_n$  представляет дополнительный бесконечно малый прогиб, изображаемый синусоидой  $da_n \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z}{l} \right)$ , наложенной на первоначальную кривую. На этом дополнительном прогибе внешние силы совершают работу.

Сила  $Q$ , приложенная на расстоянии  $z_c$  от левой опоры в точке  $C$ , претерпевающей перемещение  $da_n \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z_c}{l} \right)$ , совершает работу

$$dA_Q = \frac{Q}{2} \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z_c}{l} \right) da_n. \quad (4)$$

Потенциальную энергию деформации изгиба пилы определяем из выражения

$$U_{\text{и}} = \frac{E J_x}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2}{dz^2} y_{\text{и}} \right)^2 dz = \frac{E J_x}{l^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2; \quad (5)$$

ее приращение на бесконечно малом перемещении  $da_n$ :

$$dU_{\text{и}} = \frac{\partial U_{\text{и}}}{\partial a_n} da_n = \frac{2 E J_x \pi^4}{l^3} n^4 a_n da_n. \quad (6)$$

Сближение концов пилы при изгибе  $\lambda$  находим по известной формуле [5–7]

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy_u}{dz} \right)^2 dz = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 a_n^2. \quad (7)$$

Работа силы натяжения пилы ( $N = N_z b$ ) на бесконечно малом перемещении  $da_n$

$$dA_N = \frac{\partial A_N}{\partial a_n} da_n = N \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n. \quad (8)$$

Из условия равновесия системы следует, что  $dU_u = dA_Q - dA_N$  или

$$\frac{2E J_x \pi^4}{l^3} n^4 a_n da_n = \frac{Q}{2} \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z_c}{l} \right) da_n - N \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n, \quad (9)$$

$$\text{откуда } a_n = \frac{Q \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z_c}{l} \right)}{\frac{4E J_x \pi^4}{l^3} n^4 + N \frac{\pi^2}{l} n^2}.$$

Прогиб от изгиба пилы

$$y_u = \frac{Q l^3}{2E J_x \pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 (4n^2 + \alpha)} \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z_c}{l} \right) \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z}{l} \right), \quad (10)$$

где  $\alpha = N l^2 / (E J_x \pi^2)$ .

Представим угол поворота сечений пилы в виде тригонометрического ряда

$$\beta = b_1 \sin \frac{\pi z}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + b_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin \frac{n\pi z}{l}. \quad (11)$$

Выражение (11) удовлетворяет условиям на концах при  $z = 0$  и  $z = l$ ,  $\beta = 0$ , что соответствует случаю шарнирного закрепления (рисунок, а). Данный случай подробно рассмотрен в [2]; здесь приведем конечную формулу для определения прогиба пилы при кручении:

$$y_k = \frac{2Q x_c x l}{\pi^2 \left( C + \frac{N b^2}{12} \right)} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi z_c}{l} \sin \frac{n\pi z}{l}. \quad (12)$$

Полный прогиб пилы определяется выражением

$$y = y_u + y_k. \quad (13)$$

После подстановки (10) и (12) в уравнение (13) получаем

$$y = \frac{2Q l}{\pi^2} \left( \frac{l^2}{4E J_x \pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 (4n^2 + \alpha)} \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z_c}{l} \right) \left( 1 - \cos \frac{2n\pi z}{l} \right) + \frac{x_c x}{C + \frac{N b^2}{12}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi z_c}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} \right). \quad (14)$$

Для случая, имеющего практическое значение, когда боковая сила  $Q$  приложена к кромке пилы ( $x_c = b/2$ ) на середине ее свободной длины ( $z_c = l/2$ ), прогиб  $y$  при начальной жесткости  $j_n$  определяют в точке приложения боковой силы ( $x = x_c, y = y_c, z = z_c$ ):

для шарнирного закрепления опор

$$y = \frac{2Ql}{\pi^2} \left( \frac{l^2}{E J_x \pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2(n^2 + \alpha)} + \frac{b^2}{4C + \frac{N b^2}{3}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \right); \quad (15)$$

для закрепления в виде заделки

$$y = \frac{2Ql}{\pi^2} \left( \frac{l^2}{E J_x \pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2(4n^2 + \alpha)} + \frac{b^2}{4C + \frac{N b^2}{3}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \right). \quad (16)$$

После подстановки (15), (16) в выражение (1) получаем формулу для определения начальной жесткости:  
для шарнирного закрепления опор

$$j_n = 1 / \frac{2l}{\pi^2} \left( \frac{l^2}{E J_x \pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2(n^2 + \alpha)} + \frac{b^2}{4C + \frac{N b^2}{3}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \right); \quad (17)$$

для закрепления в виде заделки

$$j_n = 1 / \frac{2l}{\pi^2} \left( \frac{l^2}{E J_x \pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2(4n^2 + \alpha)} + \frac{b^2}{4C + \frac{N b^2}{3}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \right). \quad (18)$$

Проведем расчет начальной жесткости рамной пилы по формулам (17) и (18).

Имеем пилу со следующими параметрами:  $l = 1000$  мм;  $s = 2$  мм;  $N = 50$  кН;  $b = 160$  мм;  $E = 2,15 \cdot 10^5$  МПа;  $G = 8,1 \cdot 10^4$  МПа. При  $n = 1, 3, 5 \dots 10001$  после подстановки в формулы (17), (18) имеем  $j_n = 62,1$  и  $62,9$  Н/мм. Таким образом, полученные результаты отличаются на 1,3 %, что приемлемо для практики.

Следовательно, при существующих параметрах рамных пил тип опор не оказывает существенного влияния на их начальную жесткость, поэтому ее можно определять по формулам как для шарнирного закрепления концов (17), так и для закрепления концов в виде заделок (18).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 318 с.

2. *Иванкин И.И.* Теоретические исследования начальной жесткости ленточных пил / И.И. Иванкин // Лесн. журн. – 2000. – № 3. – С. 112 – 119. – (Изв. высш. учеб. заведений).

3. *Прокофьев Г.Ф.* Интенсификация пиления древесины рамными и ленточными пилами / Г.Ф. Прокофьев. – М.: Лесн. пром-сть, 1990. – 240 с.

4. *Прокофьев Г.Ф.* Некоторые вопросы точности рамного пиления / Г.Ф. Прокофьев // Совершенствование технологии и оборудования лесопильного производства. – Архангельск, 1981. – С. 69 – 75.

5. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1975. – 704 с.

6. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Т. 2 / С.П. Тимошенко. – 3-е изд. – М.: Наука, 1965. – 480 с.

7. *Тимошенко С.П.* Статические и динамические проблемы теории упругости / С.П. Тимошенко. – Киев: Наук. думка, 1975. – 563 с.

8. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. – 2-е изд. – М., Гостехиздат, 1955. – 576 с.

Архангельский государственный  
технический университет

Поступила 16.01.03

*I.I. Ivankin*

### **To Question of Support Types Selection when Determining Initial Stiffness of Band Saws**

It is shown that under existing parameters of frame saws the support type doesn't provide any considerable effect on their initial stiffness, therefore it is possible to determine it based on formulae both for ends pinning and ends fixed as seals.

---