

Рис. 2. Зависимость вероятности потери устойчивости трактора от угла склона при разных скоростях движения (*а*) и жесткости шин (*б*): 1, 2 — соответственно для передней и задней секции и скорости движения 1 м/с; 3, 4 — то же при скорости 3 м/с; 5, 6 — 5 м/с; 7, 8 — для передней секции при жесткости шины соответственно 600 и 845 кН/м; 9 — для задней секции при жесткости 650 и 875 кН/м

при этом снижается с 14,4 до 12,4 с<sup>-1</sup> (задняя секция) и с 10,2 до 8,4 с<sup>-1</sup> (передняя секция).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Жуков А. В., Кадолко Л. И. Основы проектирования специальных лесных машин с учетом их колебаний.—Минск: Наука и техника, 1978.—264 с. [2]. Малиновский Е. Ю., Гайцгори М. М. Динамика самоходных машин с шарнирной рамой.—М.: Машиностроение, 1974.—176 с. [3]. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.—М.: Физматиздат, 1962.—559 с. [4]. Рыскин Ю. Е. Особенности микропрофиля трелевочных волоков и их статистические характеристики // Вопросы создания колесных трелевочных тягачей.—М., 1970.—С. 148—158.—(Тр. / ЦНИИМЭ; Вып. 3).

Поступила 2 апреля 1991 г.

УДК 624.072.233.5

### СЛУЧАЙ РАСЧЕТА НАГЕЛЯ В ДРЕВЕСИНЕ

В. П. СТУКОВ

Архангельский лесотехнический институт

Условия работы нагельных и подобных им соединений весьма разнообразны и зависят от материала нагеля, размеров его поперечного сечения, угла наклона к продольным волокнам древесины, наличия продольного усилия и других факторов. Нагели могут быть напрягаемыми и ненапрягаемыми.

В работе [2] отмечалось, что нагель в древесине работает в условиях сложного напряженного состояния и может рассматриваться как балка, лежащая на упругом основании и нагруженная на конце изгибающим моментом  $M_0$ , поперечной  $Q_0$  и растягивающей  $N_0$  силами.

Для нахождения общего интеграла однородного дифференциального уравнения упругой оси балки, лежащей на упругом основании и работающей в условиях сложного изгиба [1],

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ky = 0 \quad (1)$$

используется характеристическое уравнение

$$EI r^4 - N_0 r^2 + K = 0, \quad (2)$$

где  $y$  — прогиб балки;

$EI$  — модуль упругости материала и момент инерции площади поперечного сечения балки;

$K$  — коэффициент жесткости линейного упругого основания — реакция, приходящаяся на единицу длины балки при прогибе, равном единице,  $K = K_0 d$  ( $K_0$  — коэффициент постели;  $d$  — диаметр нагеля);

$r$  — корень характеристического уравнения.

Согласно [1, 2] выражение для дискриминанта уравнения (2)

$$D = N_0^2 - 4KEI \quad (3)$$

можно записать в виде

$$D = \sqrt{KEI} - 2G\omega, \quad (4)$$

где  $G, \omega$  — модуль сдвига материала и приведенная площадь поперечного сечения балки.

Полагаем, что основание обладает всеми свойствами винклеровского упругого основания.

Параметры  $EI, N_0, K$  в уравнении (1) изменяются в широких пределах. В работе [2] приведена таблица, которая дает информацию о дискриминанте  $D$  в зависимости от вида напрягаемой арматуры, используемой в нагельном соединении при различном угле наклона нагеля к продольным волокнам древесины. В ряде случаев совокупность этих параметров может дать решение характеристического уравнения (2), при котором  $D = 0$ , когда корни действительные и равны между собой.

Рассмотрим случай  $D = 0$ , т. е.  $2G\omega = \sqrt{KEI}$ .

Согласно [1] общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$y_x = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + C_3 \alpha x \operatorname{ch} \alpha x + C_4 \alpha x \operatorname{sh} \alpha x, \quad (5)$$

где  $\alpha = \sqrt{N_0 / (2EI)}$ ; (6)

$C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные интегрирования, определяемые в зависимости от условий на концах загруженного участка балки.

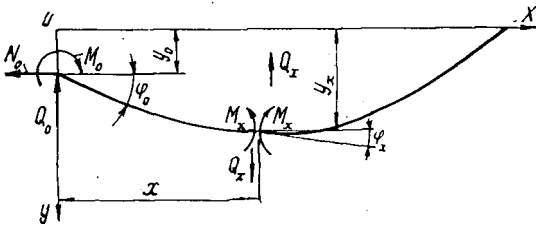
Для получения уравнений элюр  $y, \varphi, M$  и  $Q$  целесообразно использовать метод начальных параметров.

Рассмотрим балку на упругом основании, загруженную на конце изгибающим моментом  $M_0$ , поперечной силой  $Q_0$  и растягивающей силой  $N_0$  (см. рисунок). Начало координат поместим на левом конце балки. При таком расположении координатных осей знаки деформаций и усилий считаем положительными.

Произведем дифференцирование выражения (5) по  $x$  и запишем уравнения для  $\varphi_x, M_x$  и  $Q_x$ :

$$\varphi_x = \frac{dy}{dx} = \alpha [C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x + C_3 (\operatorname{ch} \alpha x + \alpha x \operatorname{sh} \alpha x) + C_4 (\operatorname{sh}^2 \alpha x + \alpha x \operatorname{ch} \alpha x)]; \quad (7)$$

$$M_x = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -EI \alpha^2 [C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + C_3 (2 \operatorname{sh} \alpha x + \alpha x \operatorname{ch} \alpha x) + C_4 (2 \operatorname{ch} \alpha x + \alpha x \operatorname{sh} \alpha x)]; \quad (8)$$



Расчетная схема балки на упругом основании в случае сложного изгиба

$$Q_x = -EI \frac{d^3y}{dx^3} = -EI\alpha^3 [C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x + C_3 (3 \operatorname{ch} \alpha x + \alpha x \operatorname{sh} \alpha x) + C_4 (3 \operatorname{sh} \alpha x + \alpha x \operatorname{ch} \alpha x)]. \quad (9)$$

Выразим постоянные интегрирования через  $y_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  в начале координат. Так как при  $x = 0$  имеем  $\operatorname{ch} 0 = 1$ ,  $\operatorname{sh} 0 = 0$ , то

$$y_0 = C_2; \quad (10)$$

$$\varphi_0 = \alpha (C_1 + C_3); \quad (11)$$

$$M_0 = -EI\alpha^2 (y_0 + 2C_4); \quad (12)$$

$$Q_0 = -EI\alpha^3 (C_1 + 3C_3). \quad (13)$$

Запишем уравнения (11) — (13) в матричной форме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\varphi_0}{\alpha} \\ y_0 + \frac{M_0}{EI\alpha^2} \\ \frac{Q_0}{EI\alpha^3} \end{vmatrix} \quad (14)$$

или

$$\vec{AC} = \vec{H}. \quad (14')$$

Решение системы уравнений (14) относительно  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_4$

$$\vec{C} = A^{-1} \vec{H}, \quad (15)$$

где  $A^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $A$ , или

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\varphi_0}{\alpha} \\ y_0 + \frac{M_0}{EI\alpha^2} \\ \frac{Q_0}{EI\alpha^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3\varphi_0}{2\alpha} + \frac{Q_0}{2EI\alpha^3} \\ -\frac{\varphi_0}{2\alpha} - \frac{Q_0}{2EI\alpha^3} \\ -\frac{y_0}{2} - \frac{M_0}{2EI\alpha^2} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Подставим значения постоянных интегрирования в уравнение (5) и приведем подобные члены:

$$y_x = y_0 \left( \operatorname{ch} \alpha x - \frac{1}{2} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x \right) + \frac{\varphi_0}{2\alpha} (3 \operatorname{sh} \alpha x - \alpha x \operatorname{ch} \alpha x) - \frac{M_0}{2EI\alpha^2} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x - \frac{Q_0}{2EI\alpha^3} (-\operatorname{sh} \alpha x + \alpha x \operatorname{ch} \alpha x). \quad (17)$$

Введем обозначения

$$A_x = \operatorname{ch} \alpha x - \frac{1}{2} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x; \quad (18)$$

$$B_x = \frac{1}{2} (3 \operatorname{sh} \alpha x - \alpha x \operatorname{ch} \alpha x); \quad (19)$$

$$C_x = \frac{1}{2} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x; \quad (20)$$

$$D_x = \frac{1}{2} (-\operatorname{sh} \alpha x + \alpha x \operatorname{ch} \alpha x). \quad (21)$$

Тогда

$$y_x = y_0 A_x + \frac{1}{\alpha} \varphi_0 B_x - \frac{1}{EI\alpha^2} M_0 C_x - \frac{1}{EI\alpha^3} Q_0 D_x. \quad (22)$$

Уравнения для  $\varphi_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$  получим непосредственным дифференцированием (22). Выражения для первых производных от функций  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $C_x$ ,  $D_x$  имеют вид

$$\frac{dA_x}{dx} = \frac{\alpha}{2} (\operatorname{sh} \alpha x - \alpha x \operatorname{ch} \alpha x); \quad (23)$$

$$\frac{dB_x}{dx} = \frac{\alpha}{2} (2 \operatorname{ch} \alpha x - \alpha x \operatorname{sh} \alpha x); \quad (24)$$

$$\frac{dC_x}{dx} = \frac{\alpha}{2} (\operatorname{sh} \alpha x + \alpha x \operatorname{ch} \alpha x); \quad (25)$$

$$\frac{dD_x}{dx} = \frac{\alpha}{2} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x. \quad (26)$$

Анализ выражений (23) — (26) и (18) — (21) позволяет установить взаимосвязь  $\frac{dA_x}{dx}$  и  $D_x$ ;  $\frac{dB_x}{dx}$  и  $A_x$ ;  $\frac{dC_x}{dx}$  и  $B_x$ ;  $\frac{dD_x}{dx}$  и  $C_x$ , что позволяет представить (23) — (26) в следующем виде:

$$\frac{dA_x}{dx} = -\alpha D_x; \quad (23')$$

$$\frac{dB_x}{dx} = \alpha A_x; \quad (24')$$

$$\frac{dC_x}{dx} = \frac{\alpha}{3} (B_x + 2\alpha x \operatorname{ch} \alpha x); \quad (25')$$

$$\frac{dD_x}{dx} = \alpha C_x. \quad (26')$$

Подставив выражения (23') — (26') в уравнение (22), получим уравнение для углов поворота

$$\varphi_x = \varphi_0 A_x - \frac{1}{3EI\alpha} M_0 (B_x + 2\alpha x \operatorname{ch} \alpha x) - \frac{1}{EI\alpha^2} Q_0 C_x - \alpha y_0 D_x. \quad (27)$$

Вторые производные от функций  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $C_x$ ,  $D_x$  с учетом взаимосвязи  $\frac{d^2 A_x}{dx^2}$  и  $C_x$ ;  $\frac{d^2 B_x}{dx^2}$  и  $D_x$ ;  $\frac{d^2 C_x}{dx^2}$  и  $A_x$ ;  $\frac{d^2 D_x}{dx^2}$  и  $B_x$  имеют вид

$$\frac{d^2 A_x}{dx^2} = -\alpha^2 C_x; \quad (28)$$

$$\frac{d^2 B_x}{dx^2} = -\alpha^2 D_x; \quad (29)$$

$$\frac{d^2 C_x}{dx^2} = \alpha^2 (A_x + \alpha x \operatorname{sh} \alpha x); \quad (30)$$

$$\frac{d^2 D_x}{dx^2} = \frac{\alpha^2}{3} (B_x + 2\alpha x \operatorname{ch} \alpha x). \quad (31)$$

Подставив (28) — (31) в уравнение (22) и умножив его на  $-EI$ , получим уравнение для изгибающих моментов

$$M_x = M_0 (A_x + \alpha x \operatorname{sh} \alpha x) + \frac{1}{3\alpha} Q_0 (B_x + 2\alpha x \operatorname{ch} \alpha x) + EI\alpha^2 y_0 C_x + EI\alpha\varphi_0 D_x. \quad (32)$$

Третьи производные от функций  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $C_x$ ,  $D_x$  с учетом взаимосвязи  $\frac{d^3 A_x}{dx^3}$  и  $B_x$ ;  $\frac{d^3 B_x}{dx^3}$  и  $C_x$ ;  $\frac{d^3 C_x}{dx^3}$  и  $D_x$ ;  $\frac{d^3 D_x}{dx^3}$  и  $A_x$  запишем в виде

$$\frac{d^3 A_x}{dx^3} = -\alpha^3 (B_x + 2\alpha x \operatorname{ch} \alpha x); \quad (33)$$

$$\frac{d^3 B_x}{dx^3} = -\alpha^3 C_x; \quad (34)$$

$$\frac{d^3 C_x}{dx^3} = -3\alpha^3 \left( D_x - \frac{2}{3} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x \right); \quad (35)$$

$$\frac{d^3 D_x}{dx^3} = \alpha^3 (A_x + \alpha x \operatorname{sh} \alpha x). \quad (36)$$

Подставив выражения (33) — (36) в уравнение (22) и умножив его на  $-EI$ , получим уравнение для поперечных сил

$$Q_x = Q_0 (A_x + \alpha x \operatorname{sh} \alpha x) + EI \frac{\alpha^3}{3} y_0 (B_x + 2\alpha x \operatorname{ch} \alpha x) + EI\alpha^2 \varphi_0 C_x - 3\alpha M_0 \left( D_x - \frac{2}{3} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x \right). \quad (37)$$

Для полубесконечной балки на упругом основании проявление краевого эффекта наблюдается на участке протяженностью  $l_{кр}$  от конца балки, где приложены усилия [1]:

$$l_{кр} = (1,5 \dots 2,0) \sqrt[4]{EI/K}. \quad (38)$$

Представление общего интеграла уравнения (1) по методу начальных параметров позволяет получить не только общий интеграл уравнения  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = P - Ky$ , когда  $P$  дана в виде непрерывной функции  $x$ , но и учесть произвольную прерывную и сосредоточенную нагрузку, а также заранее заданную деформацию балки.

Учет растягивающей осевой силы  $N_0$  целесообразен при  $N_0 \geq \geq (0,8 \dots 1,0) \sqrt{KEI}$  [1].

Приведенное решение может быть использовано и при учете влияния сдвига на изгиб.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Справочник по строительной механике корабля. Т. 1.— Л.: Судостроение, 1982.— 376 с. [2]. Стуков В. П. Теоретические основы расчета нагеля в древесине // Лесн. журн.— 1991.— № 5.— С. 48—55.— (Изв. высш. учеб. заведений).

Поступила 19 сентября 1991 г.

УДК 556.536

## О ПОСТУЛАТЕ ШЕЗИ ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ПОТОКОВ

В. Е. СЕРГУТИН

Красноярский инженерно-строительный институт

Пятый Всесоюзный гидрологический съезд (Ленинград, 1986) вынес решение об усилении поиска эмпирических связей для гидравли-