



## МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДРЕВЕСИНЫ И ДРЕВЕСИНОВЕДЕНИЕ

УДК 674.812:001.5

**В.В. Сергеевичев**

Сергеевичев Владимир Васильевич родился в 1947 г., окончил в 1972 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории и механизмов, деталей машин и подъемно-транспортных устройств С.-Петербургской государственной лесотехнической академии. Имеет более 80 печатных трудов в области технологии и механики древесных материалов.



### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ ДРЕВЕСНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ВАЛКОВЫХ ПРЕССАХ

Приведена математическая модель процесса прокатки древесных материалов в валковых прессах непрерывного действия, которая позволяет определить основные силовые параметры и выполнить анализ напряженного состояния древесных материалов.

*Ключевые слова:* фанерные трубы, напряженное состояние, анализ напряженного состояния, математическая модель.

При изготовлении плитных и листовых изделий из древесных материалов в прессах непрерывного действия имеется плоская задача для слоя. В декартовой прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$  лист занимает область  $-\infty < x < \infty; 0 < y < H; -\infty < z < \infty$ , (1) где  $H$  – толщина слоя.

Предположим, что все упругие и прочностные характеристики листа, а также геометрические, силовые и деформационные условия нагружения не зависят от  $z$ , т. е. рассмотрим плоскую задачу для слоя толщиной  $H$  или полосы  $(-\infty < x < \infty; 0 < y < H)$ , жестко закрепленной на нижней границе  $y = 0$ . Упругие перемещения по  $x$  и  $y$  обозначим через  $u$  и  $V$ . Исходя из формул Коши, плоские деформации представим в следующем виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2)$$

Природное строение древесины обуславливает ярко выраженную анизотропию рассматриваемого материала. Считая, что волокна и сосуды древесины, располагающиеся в направлении ствола дерева, идут вдоль оси

0x, будем считать деформации, содержащие продольные перемещения  $u$ , пренебрежительно малыми по сравнению с поперечными деформациями  $\partial V/\partial y$  и углами скоса  $\partial V/\partial x$ . В этом случае обобщенный закон Гука, связывающий деформации с напряжениями, будет иметь упрощенный вид:

$$\sigma_y = E \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \tau_{xy} = G \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $\sigma_y, \tau_{xy}$  – нормальное и касательное напряжения;

$E$  – модуль Юнга в направлении  $y$ ;

$G$  – модуль сдвига.

В первом приближении модель поперечного сжатия древесины и ее прокатки будем строить как одномерную модель теории сопротивления материалов, усредняя по оси  $y$  все механические, прочностные и геометрические параметры полосы, а также граничные условия на торцах прямоугольников и полуполос [2]. Не меняя обозначений, в дальнейшем будем полагать, что зависимости (2) и (3) связывают усредненные величины. При прокатке древесины, когда под давлением вала напряжения  $\sigma_y$  достигают критической величины  $\sigma_c$ , происходит сжатие клеток. Вертикальные стенки клеток частично разрушаются и складываются, горизонтальные – сближаются, в целом материал уплотняется. Таким образом, модуль сдвига уплотнившегося материала  $G_c$  увеличивается в  $1/\theta$  раз, толщина уплотнившегося материала  $h_c$  уменьшается в  $\theta$  раз ( $\theta$  – коэффициент линейного уплотнения):

$$G_c = \frac{G}{\theta}; \quad h_c = \theta h. \quad (4)$$

С одной стороны, после сжатия клеток и уплотнения древесины в поперечном направлении ее модуль Юнга значительно увеличивается, а деформациями  $\epsilon_y$  уплотненной древесины можно пренебречь, считая ее несжимаемой; с другой – главный вектор касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в сечении  $x = \text{const}$  уплотненной части полосы толщиной  $h$

$$F = \int_0^h \tau_{xy} dy = \int_0^h G \frac{\partial V}{\partial x} dy = hGV' \quad (5)$$

сохраняет свою величину и после уплотнения полосы. Действительно, в силу (4) имеем

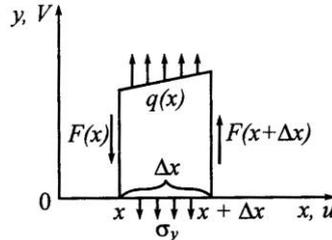
$$F_c = \int_0^{h_c} G_c \frac{\partial V}{\partial x} dy = h_c G_c V' = hGV'. \quad (6)$$

Таким образом, если  $H$  – толщина исходной полосы, то, независимо от толщины ее уплотненной части  $h$ , главный вектор касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в сечении  $x = \text{const}$

$$F = HG \frac{dV}{dx}; \quad F = \eta W'; \quad \eta = \frac{GH}{2}, \quad (7)$$

где  $W'$  – перемещение верхней границы полосы,  $W' = 2V$ .

Рис. 1. Схема действия перерезывающих сил и нормальных напряжений



Рассмотрим равновесие отрезка полосы шириной  $\Delta x$ , заключенного между сечениями  $x$  и  $x + \Delta x$  (рис. 1). Пусть, кроме ранее введенных уже величин  $F = F(x)$  и  $\sigma_y = \sigma_y(x)$ , на полосу действует вертикальная нагрузка  $q(x)$ .

Проектируя на ось  $Oy$  все силы, приложенные к прямоугольнику, получаем

$$F(x + \Delta x) - F(x) = (\sigma_y - q(x))\Delta x. \quad (8)$$

Перейдем к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$F'(x) = \sigma_y - q(x). \quad (9)$$

Подставив (7) в левую часть (9), получим дифференциальное уравнение относительно неизвестных  $V$  и  $\sigma_y$ :

$$V'' = \frac{1}{HG}(\sigma_y - q(x)). \quad (10)$$

Однако специфика прокатки делает величину  $\sigma_y(x)$  известной на определенном участке  $x$ . Рассмотрим движение одного из валков во время уплотнения, т. е. при достаточно большой нагрузке. Из общих соображений понятно, что в определенной точке перед валком постоянная до сих пор толщина  $h$  уплотненной другими валками или в другом цикле части полосы начнет при  $q(x) = 0$  монотонно расти, этот процесс закончится под нижней точкой валка. Именно монотонность роста на участке, передняя граница которого неизвестна, позволяет утверждать, что на нем соблюдается равенство

$$\sigma_y = -\sigma_c. \quad (11)$$

В дальнейшем эта гипотеза будет доказана. Заметим, что она не всегда будет справедливой при  $q(x) \neq 0$  или, например, в случае, если бы валок оказался зубчатым. В этих случаях  $\sigma_y \neq \text{const}$ . По теории упругости указанная монотонность при росте  $|x|$  и  $y = \text{const}$  порождается монотонностью убывания напряжений  $\sigma_y$  под силой, сосредоточенной в точке  $x = 0$ ,  $y = H$ . Она не дает возможности возникнуть напряжениям  $\sigma_y > -\sigma_c$ . Напряжения  $\sigma_y < -\sigma_c$  не могут появиться, поскольку они уплотняли бы новые слои древесины, пока не достигли бы величины  $\sigma_c$ . Итак, согласно (10), на участке активного уплотнения (при  $q(x) = 0$ ) справедливо уравнение

$$V'' = \frac{\sigma_c}{GH}, \quad \text{или} \quad V'' = -\frac{\sigma_c}{\eta}. \quad (12)$$

Как уже было показано, в период активной прокатки возникает предельное напряжение сжатия  $\sigma_y = -\sigma_c$ ,  $\sigma_c > 0$ ; в этот момент

$$-\sigma_y = E\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{v_2}{H - \chi}. \quad (13)$$

Из этих равенств следует, что

$$v_2(x) = -\frac{\sigma_c}{E}(H - \chi) \quad (14)$$

Так как полное перемещение  $v$  складывается из  $v_1$  и  $v_2$ :

$$v = v_1(x) + v_2(x); \quad v_1(x) = -\chi(x)(1 - \theta); \quad (15)$$

$$\chi = \frac{h(x)}{\theta}; \quad v_1(x) = h(x)\left(\frac{1}{\theta} - 1\right), \quad (16)$$

то из (14)–(16) получим:

$$w(x) = -h(x)\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) - \frac{\sigma_c}{E}\left[H - \frac{h(x)}{\theta}\right], \quad (17)$$

или

$$w(x) = -\alpha h(x) - \beta H, \quad (18)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{\theta} - \frac{\sigma_c}{\theta E} - 1; \quad \beta = \frac{\sigma_c}{E}. \quad (19)$$

Найдя силу  $F(x)$ , по формуле (18) определим толщину уплотненной древесины

$$h(x) = -\frac{1}{\alpha}[w(x) - \beta H], \quad (20)$$

а по формулам (14) и (15) – перемещение:

$$v_2(x) = -\frac{\sigma_c}{E}\left[H - \frac{h(x)}{\theta}\right]. \quad (21)$$

Заметим, что коэффициент  $\alpha$  определяется формулой (19) в первом приближении. Более точно его можно найти непосредственно из опыта, не связывая с  $\theta$ ,  $\sigma_c$ ,  $E$  в отдельности.

Пусть на некотором участке  $x \in (a, b)$  полосы толщина уплотненного слоя постоянна  $h(x) = h = \text{const}$  и напряжение  $\sigma_y > -\sigma_c$  является допредельным, неразрушающим. При прокатке эти участки располагаются на некотором удалении перед валком и непосредственно за валком и образуются в результате прокатки полосы предшествующими валками и рассматриваемым в данном цикле валком.

Согласно (16),

$$\sigma_y = E\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{v_2}{H - \frac{h}{\theta}}. \quad (22)$$

Из (13) имеем

$$F = \eta w'; \quad \frac{dF}{dx} = \sigma_y; \quad \eta w'' = \sigma_y. \quad (23)$$

Подставив (22) в (23), получаем

$$\eta w'' = \frac{E v_2}{H - \frac{h}{\theta}}. \quad (24)$$

Так как  $h(x) = \text{const}$ , то, согласно (4),  $v_1''(x) = 0$ , а согласно (3),  $w''(x) = v_2''(x)$ . Следовательно, из (24) имеем

$$v_2'' = \frac{E}{\eta \left( H - \frac{h}{\theta} \right)} v_2, \quad (25)$$

или

$$v_2'' - \gamma^2 v_2 = 0; \quad \gamma = \sqrt{\frac{E}{\eta \left( H - \frac{h}{\theta} \right)}}. \quad (26)$$

Решив это дифференциальное уравнение, найдем по формулам (23) следующие функции:

$$F(x) = \eta v_2'; \quad \sigma_y = \eta \gamma^2 v_2. \quad (27)$$

Тогда общее решение уравнения (26) примет вид:

$$w = \frac{\sigma_c}{2\eta} x^2 + C_1 x + C_2, \quad x \in X_1; \quad (28)$$

$$v_2 = C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x}, \quad x \in X_2, \quad (29)$$

где  $C_{1-4}$  – произвольные постоянные;

$X_1$  – множество промежутков активного уплотнения;

$X_2$  – множество промежутков упругой деформации.

Используя формулы (19), (21), (27), запишем другие компоненты решения:

$$F(x) = \eta \left( -\frac{\sigma_c}{\eta} x + C_1 \right); \quad (30)$$

$$h(x) = -\frac{1}{\alpha} \left[ -\frac{\sigma_c}{2\eta} x^2 + C_1 x + C_2 + \beta H \right]; \quad (31)$$

$$v_2(x) = -\frac{\sigma_c}{E} \left[ H + \frac{1}{\alpha \theta} \left( -\frac{\sigma_c}{2\eta} x^2 + C_1 x + C_2 + \beta H \right) \right], \quad x \in X_1; \quad (32)$$

$$F(x) = \eta [C_3 \gamma e^{\gamma x} - C_4 \gamma e^{-\gamma x}]; \quad (33)$$

$$\sigma_y(x) = \eta \gamma^2 [C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x}], \quad x \in X_2. \quad (34)$$

Произвольные постоянные  $C_{1-4}$  определяются из условий на границах областей  $X_1$  и  $X_2$ , включая бесконечно удаленные точки. На каждом торце прямоугольника  $x = x_0$ , т. е. на краю листа, ставится одно из условий:

$$v_2(x_0) = v_0; \quad F(x_0) = F_0; \quad h(x_0) = h_0 \quad (35)$$

или какая-либо их комбинация. Если точка  $x_0$  является заданной точкой сопряжения решений на  $X_1$  и  $X_2$ , то граничные условия представляют собой совокупность каких-либо двух из написанных ниже трех условий:

$$v_2^+(x_0) - v_2^-(x_0) = v_0; \quad (36)$$

$$F^+(x_0) - F^-(x_0) = F_0; \quad (37)$$

$$h^+(x_0) - h^-(x_0) = h_0. \quad (38)$$

Здесь  $F^+(x_0)$  и  $F^-(x_0)$  – предельные значения функции  $F(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  соответственно справа и слева;  $F_0$  – скачок функции в точке  $x_0$ .

Если точка сопряжения решений  $x_0$  заранее неизвестна и подлежит определению, то в ней должны быть удовлетворены все три условия (36)–(38). Если рассматривается решение в бесконечной или полубесконечной полосе, то, как правило, ставится условие стремления к нулю всех компонент решения при  $x \rightarrow \infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ .

Рассмотрим плоскую задачу упругой деформации бесконечного листа,  $x \in (-\infty, \infty)$ , нагруженного по прямой  $x = 0$  равномерно распределенными силами плотностью  $2F_0$  (рис. 2). Пусть  $H$  – первоначальная толщина листа. В результате одного или нескольких предшествующих циклов прокатки в нем образовался уплотненный поверхностный слой постоянной толщины  $h$ . В силу зеркальной симметрии задачи относительно сечения  $x = 0$  решение можно искать в правой половине листа  $x \in (0, \infty)$ , приложив на ее торце силу  $F_0$  и потребовав, чтобы на бесконечности решение стремилось к нулю.

Учитывая, что в силу требования  $C_3 = 0$ , из (29) получаем

$$V_2 = C_4 e^{-\gamma x}. \quad (39)$$

Согласно (33), при  $x = 0$ :

$$F_0 = -C_4 \eta \gamma e^{-\gamma x}. \quad (40)$$

Тогда из (33), (34), (39) и (40) имеем:

$$C_4 = -\frac{F_0}{\eta \gamma}; \quad V_2(x) = -\frac{F_0}{\eta \gamma} e^{-\gamma x}; \quad (41)$$

$$F(x) = F_0 e^{-\gamma x}; \quad \sigma_y^{(x)} = -F_0 \gamma e^{-\gamma x}. \quad (42)$$

Так как функция  $|\sigma_y(x)|$  на всем промежутке  $(0, \infty)$  монотонно убывает, то наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_y^{\max}$  возникает под силой  $F_0$  в точке  $x = 0$ :

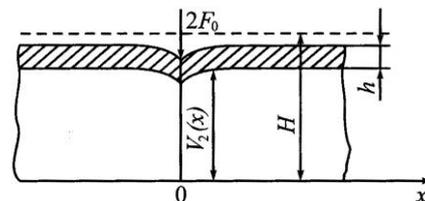


Рис. 2. Упругая деформация бесконечного листа

$$\sigma_y^{\max} = |\sigma_y(0)| = F_0 \gamma = F_0 \sqrt{\frac{2\theta E}{GH(H\theta - h)}}. \quad (43)$$

В упругой стадии прокатки сжимающие напряжения  $|\sigma_y(x)|$  не могут превышать  $\sigma_c$ . Поэтому приложенная к валку минимальная сила  $F_0^{\min}$ , при которой начинается уплотнение листа, выражается как

$$F_0^{\min} = \sigma_c \sqrt{\frac{GH(H\theta - h)}{2E\theta}}. \quad (44)$$

Как показывает формула (44), сила  $F_0^{\min}$  пропорциональна  $\sigma_c$  и увеличивается с ростом  $G$  и  $H$  и уменьшением  $E$ , что качественно соответствует опытным данным и легко объясняется с позиции теории упругости [1]. С увеличением  $h$  сила  $F_0^{\min}$  уменьшается. В допредельной упругой стадии первого цикла прокатки, когда  $h = 0$  и уплотненный слой еще отсутствует, минимальная сила, приложенная к валку, может быть определена по формуле

$$F_0^{\min} = \sigma_c H \sqrt{\frac{G}{2E}}. \quad (45)$$

Естественно, эта сила не должна зависеть от  $\theta$ , что и отражает формула (45).

Выбранная модель качественно соответствует и другим результатам экспериментов с древесиной. Например, если представить действие сосредоточенной силы, то в опыте под кромкой наблюдается излом перемещений,  $W'(0) > 0$ . Обычная балочная теория изгиба дает  $W'(0) = 0$ , теория упругости –  $W'(0) = \infty$ . Согласно (41), имеем

$$W'(0) = V_2'(0) = \frac{F_0}{\eta} = \frac{2F_0}{GH}. \quad (46)$$

Таким образом, угол излома поверхности древесины под силой конечен, пропорционален действующей силе, обратно пропорционален модулю сдвига и толщине листа или бруса.

Если сила  $F_k$  приложена в точке  $x = t_k$ , то, очевидно, решение имеет следующий вид:

$$V_{2k}(x) = -\frac{F_k}{\eta\gamma} e^{-\gamma(x-t_k)}. \quad (47)$$

Так как задача линейна, то при действии нескольких сил  $F_k$  решение выражается суперпозицией отдельных решений (47):

$$V_2(x) = -\sum_k \frac{F_k}{\eta\gamma} e^{-\gamma(x-t_k)}. \quad (48)$$

Аналогично выразим и другие компоненты решения (41), (42).

Если на отрезке  $x \in (a, b)$  задана распределенная нагрузка плотностью  $r(x)$ , то решение будет подобно (48):

$$V_2(x) = -\int_a^b \frac{r(t)}{\eta\gamma} e^{-\gamma(x-t)} dt, \quad (49)$$

где  $x$  не принадлежит отрезку  $(a, b)$ .

В случае полиномиальных нагрузок интеграл (49) выражается в элементарных функциях.

Например, при  $r(t) = r = \text{const}$  имеем

$$V_2(x) = -\frac{re^{-\gamma x}}{\eta\gamma^2} (e^{\gamma b} - e^{\gamma a}), \quad x \in (a, b). \quad (50)$$

Все полученные решения можно использовать при исследованиях и расчетах длинных прокатываемых листов, на краях которых напряжения и деформация заведомо малы.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Предложенная математическая модель в виде двух систем дифференциальных уравнений и функциональных зависимостей, построенная на базе уравнений теории упругости с использованием принципа уплотнения древесины при максимально возможных сжимающих напряжениях, адекватно описывает процесс прокатки, что подтверждено экспериментально.

2. Математические модели позволяют решить весь комплекс задач по обоснованию и оптимизации параметров рабочих органов валковых прессов и технологии прокатки, в том числе определять напряженно-деформационное состояние прокатываемого материала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий, В.* Теория упругости [Текст] / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. *Нуллер, Б.М.* К вопросу о моделировании процесса механической прокатки древесных материалов [Текст] / Б.М. Нуллер, В.В. Сергеевичев // Изв. СПбГЛТА. – 2002. – С. 63–66.

С.-Петербургская государственная  
лесотехническая академия

Поступила 13.04.05

*V.V. Sergeevichev*

#### **Mathematical Model of Rolling Wood Materials in Roll Presses**

The mathematical model of the rolling process of wood materials in the roll presses of continuous operation is provided allowing to determine the main power parameters and carry out the analysis of the stress state of wooden materials.