



УДК 519.8:621.865.8

**Д.В. Кузьмин, О.А. Томилова**

Северный (Арктический) федеральный университет

Кузьмин Дмитрий Васильевич родился в 1972 г., окончил в 1996 г. Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, кандидат технических наук, доцент кафедры робототехнических систем, машин и оборудования лесного комплекса Северного (Арктического) федерального университета. Имеет около 20 научных работ в области мехатроники и робототехнических систем.  
E-mail: mijulik@bk.ru



Томилова Ольга Александровна родилась в 1986 г., студентка Архангельского государственного технического университета. Область научных интересов – мехатроника и робототехнические системы.  
Тел.: 8 906 285 65 41



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МНОГОКОНТУРНЫХ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ АНАЛОГОВ УСКОРЕНИЙ, АППРОКСИМИРОВАННЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Показано, что разработанная на основе предложенного метода приближенная модель динамики механизма с качающимся цилиндром позволяет существенно сократить объем вычислений и обладает достаточной для практических целей точностью.

*Ключевые слова:* динамика механизмов, кинематические контуры, компьютерная алгебра, математическое моделирование, аналог ускорения, аппроксимация, кусочно-линейная функция.

Механизмы используемых в лесной промышленности подъемно-транспортных и технологических машин, функционирование которых связано с необходимостью развивать большие усилия, часто имеют структуру, включающую в себя замкнутые кинематические контуры. Примером подобной машины является гидроманипулятор СФ-65, механизм которого содержит два кинематических контура с качающимся цилиндром и один четырехшарнирный контур (рис. 1). Применение компьютерной алгебры при математическом моделировании динамики механизмов с такой структурой встречает определенные затруднения, так как теоретически точные функции положений контуров могут представлять собой сложные аналитические выражения, содержащие дробные степени и обратные тригонометрические функции.

Цель наших исследований – разработать методы построения более простых функций, которые бы с достаточ-

ной для инженерных задач точностью описывали кинематические свойства механизмов, включающих в себя замкнутые контуры, но требовали бы существенно меньших объемов вычислений.

Пусть функция положения рычажного механизма с одной степенью свободы и несколькими замкнутыми контурами имеет вид  $y = f(x)$  (где  $x, y$  – координаты входного и выходного звеньев соответственно,  $x \in [a, b]$ ). Требуется найти функцию  $y' = F(x)$ , являющуюся гладкой (кусочно-гладкой) вместе с ее первой производной на интервале  $[a, b]$  и обладающую следующими свойствами:

$$F(a) = f(a), \quad dF(a)/dx = df(a)/dx;$$

$$d^2F(x_i)/dx^2 = d^2f(x_i)/dx^2,$$

$$x_i \in [a, b], \quad i = 0, n, \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Интервалы  $(x_i, x_{i+1})$  должны быть таковы, чтобы взвешенная средняя квадратическая ошибка второй производной (аналога ускорения) на них не превышала установленного значения [1]:

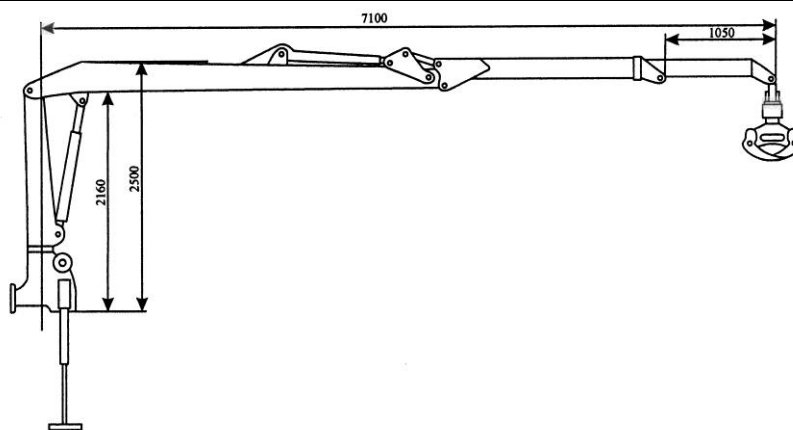


Рис. 1. Общий вид гидроманипулятора СФ-65

$$\sigma = \sqrt{\gamma \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{d^2 F(x)}{dx^2} - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]^2 dx} \leq \delta, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – заданный неотрицательный весовой коэффициент.

Указанные свойства функции  $F(x)$  вместе с условием (1) обеспечивают

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i) + y_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

крайние точки отрезков которой определяются согласно условиям поставленной задачи. Тогда приближенные аналог скорости и функцию положения механизма вычисляют интегрированием (2):

$$\frac{dF(x)}{dx} = A_i(x) + c_i;$$

$$F(x) = B_i(x) + d_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3)$$

где  $A_i(x) = k_i x^2 / 2 + b_i x$ ;

$$k_i = (y_{i+1} + y_i) / (x_{i+1} - x_i),$$

$$b_i = y_i - k_i x_i;$$

$$B_i(x) = k_i x^3 / 6 + b_i x^2 / 2 + c_i x.$$

Константы интегрирования

$$c_i = \begin{cases} \frac{df(a)}{dx}, & i = 0; \\ \frac{dF(x_i)}{dx} - A_i(x_i), & 0 < i \leq n-1; \end{cases} \quad (4)$$

$$d_i = \begin{cases} f(a), & i = 0, \\ F(x_i) - B_i(x_i), & 0 < i \leq n-1. \end{cases}$$

В процессе формирования модели динамики механизма с одноподвижными контурами и несколькими степенями свободы вычисления по формулам (1) – (4)

достаточное приближение к теоретически точной функции положения  $f(x)$ , так как при интегрировании среднеквадратическая ошибка уменьшается. Наиболее простой является аппроксимация аналога ускорения с помощью кусочно-линейной функции:

выполняются на основе передаточных функций контуров, рассчитанных по точным функциям положений для конкретных значений геометрических параметров звеньев. В качестве весового коэффициента  $\gamma$  можно принять значение, вычисляемое по величине диапазона изменения точного аналога ускорения на интервале  $[a, b]$ . Допускаемая средняя квадратическая ошибка  $\delta$  назначается таким образом, чтобы точность приближения была удовлетворительной, а число интервалов  $n$  как можно меньше. В дальнейшем исследование динамики механизма проводится на основе математической модели с приближенными передаточными функциями контуров, что позволит существенно сократить время вычислений и экономно использовать ресурсы компьютера.

Применение разработанного метода построения приближенных кинематических характеристик рассмотрим на примере одноконтурного механизма с качающимся цилиндром (рис. 2).

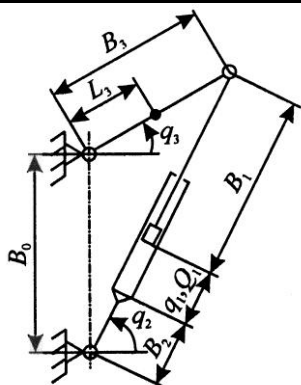


Рис. 2. Схема одноконтурного механизма с качающимся цилиндром ( $q_2 = f_2(q_1) = \arccos \left[ \frac{B_3 \cos \varphi_3(q_1)}{B + q_1} \right]$ ;  $B = B_1 + B_2$ ;

$$q_3 = f_3(q_1) = \arcsin \left[ \frac{\varphi_3 + q_1 - B_0 - B_3}{2B_0B_3} \right]$$

Модель динамики механизма, учитывающая только массу коромысла 3, описывается уравнением [2]

$$Q_1 = \Psi_{31} m_3 L_3^2 \ddot{q}_3, \quad (5)$$

где  $Q_1$  – усилие, развиваемое гидроцилиндром;

$\Psi_{31}$  – скорость,  $\Psi_{31} = df_3/dq_1$ ;

$$\Psi_{31} = 2(B + q_1) \left[ B_0 B_3 \left[ 4 - (B_0 B_3)^{-2} \left[ (B + q_1)^2 - B_0^2 - B_3^2 \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \partial \Psi_{31} / \partial q_1 = & 2(B_0 B_1)^{-1} \left[ 4 - (B_0 B_3)^{-2} \left[ (B + q_1)^2 - B_0^2 - B_3^2 \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 2(B + q_1)^2 \left[ (B + q_1)^2 - B_0^2 - B_3^2 \right] \times \\ & \times (B_0 B_3)^{-3} \left[ 4 - (B_0 B_3)^{-2} \left[ (B + q_1)^2 - B_0^2 - B_3^2 \right]^2 \right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты полиномов, приближенно описывающих кинематические характеристики механизма с параметрами  $B = B_0 = 0,7$  м,  $B_3 = 0,4$  м, полу-

$m_3$  – масса коромысла 3;  
 $\ddot{q}_3$  – угловое ускорение коромысла 3,

$$\ddot{q}_3 = \Psi_{31} \ddot{q}_1 + (d\Psi_{31}/dq_1) \dot{q}_1^2.$$

Точные формулы аналогов скорости и ускорения данного механизма имеют следующий вид:

ченные согласно (1) – (4) и с учетом  $a = 0$ ,  $b = 0,3$  м,  $\gamma = 0,051$ ,  $\delta = 0,005$ , приведены в таблице.

Коэффициент	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$k_i$	20,854	55,641	135,981	260,676
$b_i$	1,698	-3,521	-22,079	-56,869
$c_i$	2,609	3,000	5,144	9,997
$d_i$	-0,290	-0,310	-0,475	-0,926

Графики точного (пунктирная линия) и приближенного (сплошная линия) аналогов ускорения приведены на рис. 3, а, скорости – на рис. 3, б, функций положения – на рис. 3, в. Усилие  $Q_1$ , развиваемое гидроприводом при осуществлении движения штока относительно цилиндра по закону  $q_1(t) = 0,3 \left[ \tau - \varphi \sin(2\pi t / \tau) \right]$  (где время  $\tau = 5$  с; масса коромысла  $m_3 = 500$  кг), приведено на графике (рис. 3, г). Пунктирной линией показано усилие  $Q_1$ , вычисленное по точным формулам, сплошной линией – по приближенным

формулам для кинематических характеристик механизма. Анализ графиков показывает, что даже при малом числе интервалов ( $n = 4$ ) результаты исследования динамики точной и приближенной моделей механизма практически совпадают. При этом время, затрачиваемое компьютером на вычисление усилия  $Q_1$  согласно формуле (5) с помощью пакета программ Mathcad 2001 по полученным приближенным характеристикам примерно в 4 раза меньше затраченного на расчет по точным характеристикам.

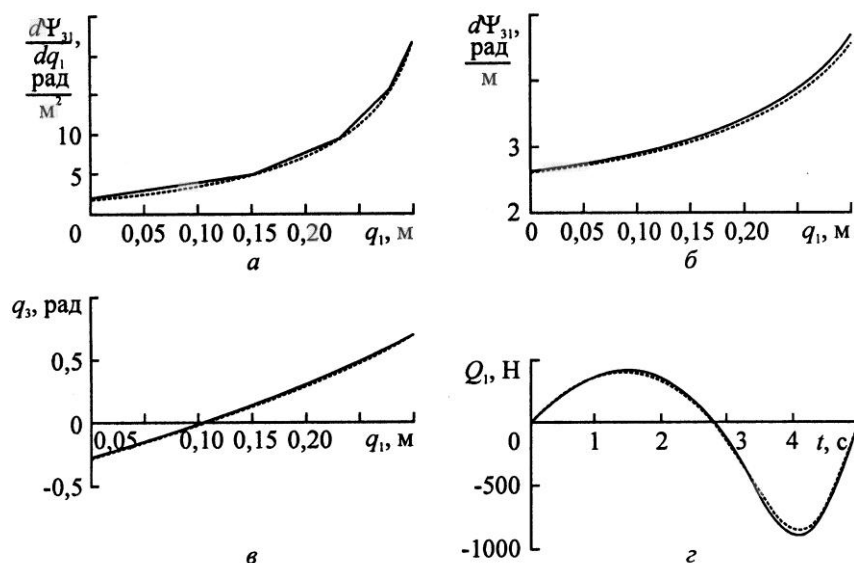


Рис. 3. Графики точного (пунктирная линия) и приближенного (сплошная линия) аналогов ускорения (а), скорости (б), функций положения (в) и усилия (г)

### Вывод

Предложенный метод построения приближенных кинематических характеристик механизмов с наличием замкнутых контуров, основанный на аппроксимации аналога ускорения кусочно-линейной функцией, позволяет существенно сократить объем вычислений, необходимых для исследования математических моделей динамики. Результаты вычислений с применением полученных данным методом приближенных кинематических характеристик, даже при малом числе интервалов, обладают достаточной для инженерных целей точностью, что позволяет использовать метод в задачах построения рабочих математических моделей динамики механизмов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / Пер. с англ. И.Г. Арамановича [и др.]; под общ. ред. И.Г. Арамановича. М.: Наука, 1978. 832 с.

2. Кузьмин Д.В. Моделирование динамики мехатронных систем. Уравнения и алгоритмы: Монография. Архангельск: Арханг. гос. техн. ун-т, 2008. 120 с.

Поступила 13.05.09

*D.V. Kuzmin, O.A. Tomilova*  
Northern (Arctic) Federal University

### Dynamics Simulation of Multicircuit Mechanisms based on Acceleration Analogs Approximated by Piecewise Linear Functions

It is shown that the approximated dynamics model of mechanism with oscillating cylinder developed based on the proposed method allows to sufficiently reduce the computational intensity and possesses enough accuracy for practical purposes.

Keywords: dynamics of mechanisms, kinematic circuits, computer algebra, mathematic simulation, acceleration analog, approximation, piecewise linear functions.