

УДК 625.032.43.001.24

С.И. МОРОЗОВ

Архангельский государственный технический университет



Морозов Станислав Иванович родился в 1929 г., окончил в 1952 г. Ленинградскую лесотехническую академию, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Архангельского государственного технического университета, член-корреспондент РИА, заслуженный деятель науки и техники РФ. Имеет около 140 печатных работ в области изучения устойчивости температурно-напряженного рельсового пути, закрепления его от угона рельсов, удара тел, применения ЭВМ при решении задач механики.

УДАР ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ О ПРЕПЯТСТВИЕ

Изложена методика решения задач удара цилиндрических тел о препятствие в виде наклонной плоскости или ступеньки. Использована классическая теория удара. Дан пример решения задачи.

Methodic of problem solving is described related to the impact of cylindrical bodies on such obstacles as an inclined plane or a step. The classical theory of impact is used. The example of problem solving is given.

При качении цилиндрических тел (к которым относят катки, трубы, колеса и т. д.) имеет место явление удара при их взаимодействии с препятствием в виде уступа или наклонной плоскости.

Одна из таких задач была решена нами в работе [2] для удара колеса о принимающий рельс в зоне стыка. Рассмотрим методику решения других аналогичных задач, которые могут встретиться при изучении ударов тел на лесозаготовках и лесотранспорте.

Предположим, что сплошное цилиндрическое катящееся тело имеет массу m_1 , радиус r_1 , скорость движения центра масс v_1 , угловую скорость вращения до удара $\omega_{10} = v_1/r_1$. Второе тело представляет собой неподвижную наклонную массивную плоскость, т. е. $v_2 = 0, m_2 = \infty, I_2 = \infty$.

Тело, которое катится без скольжения, совершает плоскопараллельное движение, но не является свободным. На него наложена не удерживающая связь, совпадающая с мгновенным центром скоростей ρ . При ударе здесь могут возникать импульсы реакций связи, что влияет как на процесс удара, так и на его характеристики.

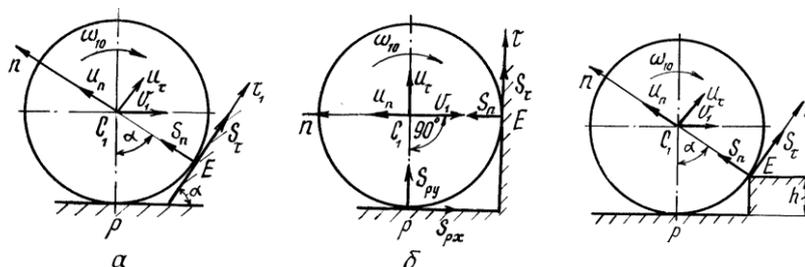


Рис. 1.

Рис. 2.

В случае, показанном на рис. 1, *а*, мгновенный центр скоростей при ударе перемещается в точку *E*. Контакт с поверхностью качения в точке *p* исчезает, и тело можно считать свободным, так как импульсы опорных реакций и импульсы ударной силы в точке *E* совпадают.

Во втором случае (рис. 1, *б*) связь тела с поверхностью качения в точке *p* может сохраниться. Здесь необходимо определить не только импульсы ударных сил в точке *E*, но и реакцию неударяющей связи в точке *p*.

Таким образом, выбор расчетной схемы зависит от расположения точек *E* и *p* при ударе. Если они совпадают, то каток можно рассматривать как свободное тело; если не совпадают, то необходимо учитывать появление в точке *p* импульсов ударных реакций.

Критерием для выбора расчетной силы могут послужить знаки импульсов опорных реакций S_{px} и S_{py} . При $S_{py} < 0$ связь катка с неподвижной поверхностью в момент удара исчезает (так как эта связь неударяющая). Такое тело можно считать при ударе свободным, так как $S_{px} = 0$ и $S_{py} = 0$.

При $S_{py} > 0$ в точке *p* есть нормальная ударная реакция. Если выполняется условие $S_{px} < S_{py}f$ (где *f* – коэффициент трения скольжения), то катящееся цилиндрическое тело в момент удара можно рассматривать как тело с неподвижной осью вращения, совпадающей с точкой *p*.

Если поверхности соударяющихся тел шероховатые, то связь между ними в точке контакта создается только за счет сил трения. В случае, когда рассматривают соударение зубчатых колес в рядовых, планетарных или дифференциальных передачах, то в точке *p* импульсы S_{px} и S_{py} могут иметь любое направление и любое значение. Поэтому при соударении зубчатых колес точку *p* следует рассматривать как центр вращения и использовать схему соударения двух вращающихся тел с неподвижными осями вращения.

Для расчетной схемы на рис. 2 при ударе происходит отрыв катка от поверхности качения. На рис. 1, *а* показан удар о наклонную плоскость, на рис. 2 – о ступеньку. В принципе эти случаи аналогичны, т. е. кинематические и силовые характеристики процесса удара находят по одним и тем же расчетным зависимостям. Однако в первом случае угол α задан, во втором его надо предварительно найти по формуле

$$\alpha = \frac{r_1 - h}{r_1},$$

где h – высота ступеньки.

Предположим, что в момент удара проскальзывание катка в точке E отсутствует, т. е. она является мгновенным центром скоростей.

Используя формулы, приведенные в работах [1, 3] применительно к данному частному случаю соударения тел, получаем

$$\begin{aligned} S_\tau &= \frac{1}{3} m_1 v_1 (1 - \cos \alpha); \\ S_n &= m_1 v_1 (1 + \varepsilon) \sin \alpha; \\ u_\tau &= \frac{1}{3} v_1 (1 + 2 \cos \alpha); \\ u_n &= v_1 \varepsilon \sin \alpha; \\ \omega_1 &= -\frac{v_1}{3r} (1 + 2 \cos \alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

где S_τ, S_n – импульсы ударных сил в точке E , направленные по осям τ и n ;

u_τ, u_n – составляющие скорости точек C_1 после удара, направленные параллельно осям τ и n ;

ω_1 – угловая скорость вращения тела 1 после удара;

ε – коэффициент восстановления, определяемый экспериментально.

Положение точки соударения E определяется расстоянием OE , которое можно найти по формуле

$$OE = r_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

В результате действия ударных сил с импульсом S_n в точке E возникают пластические (или хрупкие) деформации материала, что приведет к образованию вмятины, которая при повторном воздействии цилиндрического тела о горизонтальную плоскость будет увеличиваться.

Для пустотелого цилиндра (трубы) изменится только момент инерции. Его находят по формуле $I_1 = mr^2$. Соответствующие расчетные зависимости имеют вид

$$\begin{aligned} S_\tau &= \frac{1}{2} m_1 v_1 (1 - \cos \alpha); \\ S_n &= (1 + \varepsilon) m_1 v_1 \sin \alpha; \\ u_\tau &= \frac{1}{2} v_1 (1 + 2 \cos \alpha); \\ u_n &= \varepsilon v_1 \sin \alpha; \\ \omega_1 &= -\frac{v_1}{2r_1} (1 + 2 \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2)$$

Как для сплошного, так и для пустотелого цилиндра имеют место следующие общие закономерности.

а) Угловая скорость цилиндра после удара знака не меняет, поэтому направление вращения сохраняется. При $\alpha = 0$ (или $h = 0$) сохраняется и значение ω , т. е. удара тел не происходит. С увеличением α (или h) угловая

скорость цилиндра после удара уменьшается, и в диапазоне $0 < \alpha < 90^\circ$ (или $0 < h < r_1$) ее значение не равно нулю.

б) Обе составляющие скоростей точки C_1 после удара (u_τ и u_n) положительны в диапазоне изменения угла α от нуля до 90° , т. е. имеют направление осей τ и n .

в) Составляющая u_τ вызывает вращение цилиндра вокруг точки E , что возможно только при отсутствии проскальзывания тел в этой точке. Если поверхности соударяющихся тел гладкие, то $S_\tau = 0$, следовательно, $\omega_1 = \omega_{10}$, $u_\tau = v_\tau$. Это означает, что угловые и линейные скорости в результате удара не изменятся. При наличии проскальзывания тел в точке E и действия сил трения значения ω_1 , u_τ и u_n будут меньше, чем аналогичные значения этих скоростей при отсутствии проскальзывания в точке E .

г) При $\varepsilon = 0$ значения $u_n = 0$.

В случае «б» произойдет «отскок» цилиндра от точки E , поэтому после удара вращения его вокруг точки E не возникает (нет контакта цилиндра с ребром или плоскостью). Для изучения этого движения удобно применить дифференциальные уравнения плоско-параллельного движения свободного тела. Предполагая, что ось x направлена горизонтально, ось y вертикально, а в момент удара начало координат совпадает с точкой C_1 , и пренебрегая сопротивлением воздуха, имеем

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= 0; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -m_1 g; \\ I_1 \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_1 &= (u_\tau \cos \alpha - u_n \sin \alpha) t; \\ y_1 &= -\frac{gt^2}{2} + (u_\tau \sin \alpha + u_n \cos \alpha) t; \\ \varphi &= \omega_1 t. \end{aligned}$$

Далее задача решается по правилам механики. Отметим, что во время полета угловая скорость вращения цилиндра не изменяется.

д) В том случае, когда нет вращения цилиндра до удара (т. е. $\omega_{10} = 0$, но $v_1 \neq 0$), расчетные зависимости принимают вид: для сплошного цилиндра

$$\begin{aligned} S_\tau &= \frac{1}{3} m_1 v_1 \cos \alpha; \\ S_n &= (1 + \varepsilon) m_1 v_1 \sin \alpha; \\ \omega_1 &= -\frac{2v_1}{3r_1} \cos \alpha; \\ u_\tau &= -\frac{2}{3} v_1 \cos \alpha; \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_n = \varepsilon v_1 \sin \alpha;$$

для пустотелого цилиндра

$$\begin{aligned} S_\tau &= -\frac{1}{2} m_1 v_1 \cos \alpha; \\ S_n &= (1 + \varepsilon) m_1 v_1 \sin \alpha; \\ \omega_1 &= -\frac{1}{2r_1} \cos \alpha; \\ u_\tau &= -\frac{v_1}{2r_1} \cos \alpha; \\ u_n &= \varepsilon v_1 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь импульс S_τ меняет направление на обратное, но угловые и линейные скорости сохраняют первоначальное направление.

Для того чтобы получить наглядное представление о порядке определяемых величин, рассмотрим пример соударения сплошного цилиндра о ступеньку высотой h при $m_1 = 200$ кг; $m_2 = \infty$; $r_1 = 0,3$ м; $I_1 = 9$ кг·м²; $I_2 = \infty$; $v_1 = 4$ м/с и нескольких значений h и ε . Результаты расчета приведены в таблице.

Зависимости расчетных величин от угла α при $\varepsilon = 1$ представлены на рис. 3. Они показывают, что с ростом α значения S_τ , S_n и u_n возрастают, а u_τ и ω_1 падают.

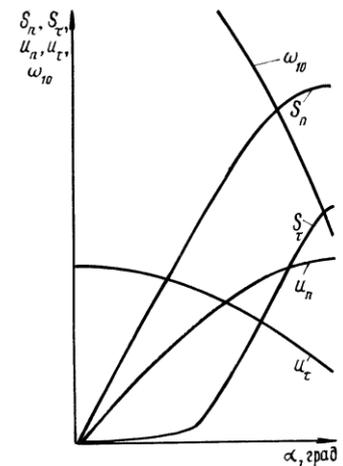
В последней графе таблицы приведены минимальные значения коэффициента трения в точке E . Если фактическое значение коэффициента

α , град	h , м	ε	S_τ , Н·с	S_n , Н·с	u_τ , м/с	u_n , м/с	ω_1 , с ⁻¹	f_E
48,19	0,04	0	89	596	3,11	0	-10,4	0,15
		0,5	89	894	3,11	1,49	-10,4	0,10
		1,0	89	1193	3,11	2,98	-10,4	0,07
70,53	0,15	0	178	754	2,22	0	-7,4	0,24
		0,5	178	1131	2,22	1,88	-7,4	0,16
		1,0	178	1508	2,22	3,77	-7,4	0,12
90,00	0,30	0	267	800	1,333	0	-4,4	0,33
		0,5	267	1200	1,333	2,0	-4,4	0,22
		1,0	267	1600	1,333	4,0	-4,4	0,17

трения f больше f_E , то проскальзывание цилиндра в точке E не происходит. Если $f < f_E$, то такое проскальзывание имеет место.

При одном и том же значении ε значение f_E увеличивается с высотой ступеньки.

Рассмотрим удар цилиндрического тела о вертикальную стенку (или о ступеньку



при $h = r_1$).

Ранее было отмечено, что в момент соударения цилиндрического тела о наклонную плоскость происходит «перескок» мгновенного центра скоростей из точки p в точку E .

Однако при $\alpha = 90^\circ$ (или $h = r_1$) цилиндр касается неподвижных поверхностей в двух точках (рис. 1, б). Этот случай требует дополнительного изучения. Здесь в точке E возникают импульсы ударных сил, а в точке p могут появиться импульсы опорных реакций, которые обозначим S_{px} и S_{py} .

Составим три уравнения по теореме моментов: относительно точки C_1

$$I_1 (\omega_1 - \omega_{10}) = S_\tau r_1 - S_{px} r_1;$$

относительно точки p

$$I_p (\omega_1 - \omega_{10}) = S_\tau r_1 + S_n r_1; \quad (5)$$

относительно точки E

$$I_E (\omega_1 - \omega_{10}) = -S_{py} r_1 - S_{px} r_1.$$

В систему (5) входят три неизвестные: ω_1 , S_{py} и S_{px} . Значения S_τ и S_n определяем по уравнениям системы (1) при $\alpha = 90^\circ$.

Решая систему (5), находим

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_{10} &= \frac{S_\tau + S_n}{I_p} r_1; \\ S_{px} &= \frac{1}{3} (2 S_\tau - S_n); \\ S_{py} &= -\frac{1}{3} (5 S_\tau + 4 S_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Для сплошного цилиндра (при $\alpha = 90^\circ$) имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} m_1 r_1^2; \\ I_E = I_p &= \frac{3}{2} m_1 r_1^2; \\ S_\tau &= \frac{m_1 V_1}{3}; S_n = (1 + \varepsilon) m_1 v_1. \end{aligned}$$

Преобразовывая, получаем

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_{10} &= \frac{m_1 V_1 (4 + 3\varepsilon)}{3I_p} r_1 = \frac{2V_1 (4 + 3\varepsilon)}{9r_1}; \\ S_{px} &= -\frac{m_1 V_1}{9} (1 + 3\varepsilon); \\ S_{py} &= -\frac{m_1 V_1}{9} (17 + 12\varepsilon). \end{aligned} \quad (7)$$

В данном случае S_{py} отрицательно, поэтому в результате удара произойдет отрыв колеса от горизонтальной поверхности, т. е. S_{px} и S_{py} принимаем равными нулю.

Таким образом, приведенные зависимости позволяют решить задачу удара цилиндрического тела о препятствие полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Морозов С.И. К вопросу о решении задач удара на лесотранспорте // Лесн. журн.- 1994. - № 1. - С. 40-47. - (Изв. высш. учеб. заведений). [2]. Морозов С.И. Методика решения задач удара колеса о рельс в стыке // Лесн. журн.- 1994. - № 2. - С. 35-41. - (Изв. высш. учеб. заведений). [3]. Морозов С.И. Удар двух тел: Методич. указ. по решению задач. - Архангельск: РИО АГТУ, 1966. - 56 с.

Поступила 20 февраля 1997 г.
