

## ЛЕСНОЕ ХОЗЯЙСТВО

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕКУЩЕГО ОБЪЕМНОГО  
ПРИРОСТА СТВОЛОВ И ДРЕВОСТОЕВ

М. А. ДВОРЕЦКИЙ

(Поволжский лесотехнический институт)

## Вероятная ошибка

Излагаемые ниже рассуждения о точности определения приростов в одинаковой мере относятся как к текущему приросту по объему ствола, так и к текущему приросту по запасу наличного древостоя, ибо как тот, так и другой могут быть выражены однотипной формулой вида:

$$z_v = V_a - V_{a-t},$$

где  $V_{a-t}$  — объем ствола или запас наличных стволов древостоя в начале  $t$ -летнего периода наблюдений за приростом;

$V_a$  — объем ствола или запас наличных стволов древостоя в момент  $a$ , соответствующий концу  $t$ -летнего периода наблюдений.

Установлением возможных ошибок в определении текущего объемного прироста  $z_v$  занимался ряд исследователей. Так, процент возможной ошибки в определении  $z_v$  составляет по Науменко и Кренну [1], [2]:

$$p_z = \frac{p\sqrt{V_a^2 + V_{a-t}^2}}{V_a - V_{a-t}}, \quad (1)$$

и по Лёчу [3]:

$$p_z = \frac{100p}{tp_v} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1,0p^t}\right)^2}. \quad (2)$$

Здесь  $p$  — выраженная в процентах ошибка в определении объема ствола или запаса древостоя, которая принимается одинаковой для начальной и конечной их величины;

$p_v$  — процент текущего прироста.

Путем несложных преобразований (1) приходим к выражению:

$$p_z = p\sqrt{2r_v(r_v - 1) + 1}, \quad (3)$$

где  $r_v = \frac{V_a}{z_v}$  — относительный объем ствола или относительный запас  
древостоя.

В формулу (3) вместо  $r_v$  вводим пресслеровский процент прироста  $p_v$ , пользуясь соотношением:

$$r_v = \frac{200 + p_v}{2p_v} = \frac{100}{p_v} + 0,5;$$

таким образом

$$p_z = p \sqrt{\frac{200^2}{2p_v^2} + 0,5} = \frac{p}{p_v} \sqrt{20\,000 + 0,5p_v^2} = \frac{k}{p_v} p, \quad (4)$$

Коэффициент  $k$  формулы (4) в зависимости от  $p_v$  принимает следующие значения:

$p_v$ в %	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$k$	141,5	141,6	142	143	144	146	148	150	152	155	158

Из формулы (4) следует, что ошибка в определении прироста тем меньше, чем точнее измерен объем ствола (или запас древостоя) и чем больше процент текущего периодического прироста.

По формуле Лёча (2) выраженная в процентах ошибка в определении  $z_v$  при  $p = 1\%$  в зависимости от  $p_v$  и  $t$  составляет:

$p_v$ %	1	2	3	4	5
$t = 10$ лет	13,50	6,45	4,15	3,00	2,35
$t = 5$ лет	27,60	13,50	8,80	6,50	5,10

Лёч полагает, что его приближенная формула устанавливает, как влияют на процент точности определения  $z_v$  три фактора  $p$ ,  $p_v$  и  $t$ , и дает достаточно точные результаты.

Однако, следует заметить, что продолжительность периода наблюдений не отражается на величине ошибки в определении  $z_v$  если процент среднего периодического прироста остается неизменным. Это подтверждают и вышеприведенные данные Лёча (при всех прочих равных условиях, средний периодический  $p_v$  при периоде  $t = 5$  лет вдвое больше среднего  $p_v$  при  $t = 10$  лет); это же отсутствие влияния  $t$  вытекает из формулы (4).

Ниже приводятся вычисленные по формуле Лёча и по формуле (4) возможные (выражения в процентах) ошибки в определении  $z_v$  в зависимости от процента текущего периодического прироста  $p_v$  при точности определения объема ствола  $p = 1\%$ .

$p_v$ %	10	20	30	40	50
По Лёчу в %	13,5	6,45	4,15	3,00	2,35
По формуле (4) в %	14,2	7,1	4,8	3,6	2,9

Приводимое сопоставление свидетельствует, что обе формулы дают практически равнозначные результаты.

При определении же текущего прироста по запасу древостоев со срубкой деревьев ошибки в определении запаса обычно составляют в среднем около 3% и в этом случае приведенные проценты ошибок следует утроить.

Тогда получается, что величина текущего объемного прироста слабых растущих стволов и древостоев (при  $p_v < 10\%$ ) практически неуправляема, а вычисленное ее значение проблематично.

### Действительная ошибка

Допустим, что при определении конечного объема ствола ( $V_a$ ) ошибка равна  $x$ , а начального ( $V_{a-t}$ ) —  $y$ ; вследствие этого вычисляемый объемный прирост ствола  $z_v$  содержит ошибку, равную  $u$ ; причем

$$z_v + u = V_a + x - (V_{a-t} + y) = V_a - V_{a-t} + (x - y),$$

тогда ошибка в определении абсолютной величины прироста равна алгебраической разности ошибок в измерении конечного и начального объемов:

$$u = x - y. \quad (5)$$

Если все три члена выражения (5) умножить соответственно на равные величины:

$$\frac{100z_v}{z_v}, \quad \frac{100V_a}{V_a} \text{ и } \frac{100V_{a-t}}{V_{a-t}},$$

то получится:

$$\frac{100u}{z_v} z_v = \frac{100x}{V_a} V_a - \frac{100y}{V_{a-t}} V_{a-t},$$

или

$$p_z z_v = p_1 V_a - p_2 V_{a-t}, \quad (6)$$

где  $p_z$ ,  $p_1$  и  $p_2$  — выраженные в процентах ошибки в определении текущего прироста ( $z_v$ ), конечного объема ( $V_a$ ) и начального объема ( $V_{a-t}$ ) соответственно. Если ошибка в определении  $z_v$  отсутствует (то есть  $p_z = 0$ ), уравнение (6) принимает вид:

$$p_1 V_a = p_2 V_{a-t}, \quad (7)$$

откуда

$$p_1 : p_2 = V_{a-t} : V_a \text{ и } p_2 = p_1 \frac{V_a}{V_{a-t}}. \quad (8)$$

Из полученных уравнений следует, что объемный прирост ствола (или древостоя), вычисленный любым способом, может быть определен точно лишь в том случае, если:

а) абсолютные ошибки в измерении конечного и начального объемов (запасов) будут одинаковыми по величине и знаку;

б) выраженные в процентах ошибки в измерении конечного и начального объемов (запасов) будут обратно пропорциональны самим объемам (запасам). В этом случае выраженные в процентах ошибки в измерении начального объема (запаса) должны быть в  $V_a : V_{a-t}$  раз больше соответствующих ошибок в определении конечного объема.

Во всех других случаях текущий объемный прирост будет установлен неточно, с ошибкой, разной для различных способов определения объемов (запасов).

Преобразуя формулу (6) имеем:

$$p_z = \frac{p_1 V_a - p_2 V_a - t}{z_v} = \frac{V_a}{z_v} p_1 - \frac{V_a - z_v}{z_v} p_2 = r_v p_1 - (r_v - 1) p_2 \quad \text{или}$$

$$p_z = p_2 + r_v (p_1 - p_2). \quad (9)$$

где  $z_v$  — уже известная нам величина относительного объема ствола или относительного запаса древостоя, характеризующая интенсивность нарастания древесины.

Из последней формулы видно, что ошибка в определении объемного прироста существенно зависит от точности измерения объема ствола (или запаса древостоя) в начале и конце наблюдений ( $p_1$  и  $p_2$ ) и показателя интенсивности нарастания древесины ( $r_v$ ).

Если же оба объема ствола измерены с одинаковой точностью, то есть ( $p_1 = p_2$ ) то, как следует из формулы (9), с той же степенью точности будет определен и текущий прирост древостоя.

Вводя в формулу (9) пресслеровский процент, имеем:

$$p_z = p_2 + \left( \frac{100}{p_v} + 0,5 \right) (p_1 - p_2) = \frac{100}{p_v} (p_1 - p_2) + 0,5 (p_1 + p_2). \quad (10)$$

Полученная формула выраженной в процентах действительной ошибки совсем не похожа на формулу (4), определяющую процентное выражение возможной ошибки.

Рассмотрим такой пример:

$$V_a = 5,0 \text{ м}^3; \quad V_{a-t} = 4,0 \text{ м}^3; \quad z_v = 5,0 - 4,0 = 1,0 \text{ м}^3.$$

Предположим, что при изменении начального и конечного объемов была допущена ошибка  $p = +1\%$ ; тогда их вычисленные значения будут:  $V_a = 5,05 \text{ м}^3$  и  $V_{a-t} = 4,04 \text{ м}^3$ , а прирост составит  $z_v = 5,05 - 4,04 = 1,01 \text{ м}^3$ , то есть тоже на 1% больше действительного прироста; иными словами,  $-p_z = +1\%$ . При вычислении же по статистической формуле возможная ошибка в определении прироста получается равной:

$$m_z = 0,0p \sqrt{V_a^2 + V_{a-t}^2} = 0,01 \sqrt{5^2 + 4^2} = 0,064 \text{ м}^3,$$

или 6,4%; этот же результат дает формула (4),

$$p_z = \frac{p \cdot k}{p_v} = \frac{142}{22,22} = 6,4 \%,$$

в то время как  $u = x - y = 0,05 - 0,04 = 0,01 \text{ м}^3$ .

Таким образом, выявляется существенное расхождение между действительным и возможным: возможная ошибка оказывается значительно больше действительной.

### Недостатки теории ошибок

А. По нашему мнению, здесь дело в неправильном применении статистических методов: пытаются вычислять ошибку в определении прироста на основании результатов однократного измерения, в то время как применяемая формула ошибки разности двух средних величин справедлива в том случае, когда выполнено большое число наблюдений.

По статистической теории ошибка разности (а текущая — разность двух объемов ствола или двух запасов древесины) делается по формуле

$$m_z^2 = m_x^2 + m_y^2 - 2 \frac{(\Delta' \Delta'')}{n},$$

которая только при большом числе наблюдений ( $n$ ) может быть представлена в виде

$$m_z^2 = m_x^2 + m_y^2.$$

В формуле (11)  $m$  — среднеквадратические случайные ошибки, а  $\Delta$  — случайные ошибки отдельных измерений.

При определении текущего прироста отдельного ствола или древостоя  $n = 1$ , и поэтому все ошибки формулы являются случайными ошибками отдельных измерений.

Тогда:

$$m_z = 0,0p \sqrt{V_a^2 + V_{a-t}^2 - 2V_a V_{a-t}} = 0,0 p z_v. \quad (12)$$

Формула (12) находится в полном соответствии с формулой (9): если конечный и начальный объемы ствола измерены с одинаковой точностью, то текущий прирост будет определен с той же степенью точности, независимо от самой величины текущего прироста.

Б. При статистическом анализе принимают, что выраженные в процентах ошибки в измерении начальных и конечных значений объемов ствола и запасов древостоя одинаковы. Однако, как правило, это не соответствует действительности. Кроме того, средняя ошибка в определении объема ствола принимается равной  $\pm 1\%$ , а запаса древостоя  $\pm 2-3\%$ .

Обсудим данные определения конечного и начального объемов 35 стволов сосны. Стволы были обмерены по отрезкам длиной 0,5 м; количество отрезков у отдельных стволов составляло от 43 до 66 штук. Эти объемы принимались за истинные. Объемы стволов вычислялись по однометровым отрезкам (количество отрезков составляло 21—32), по двухметровым отрезкам (количество их составляло 10—16) и по четырехметровым отрезкам (количество отрезков составляло 5—8 штук на ствол).

Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Относительные ошибки в определении конечного и начального объемов ствола в зависимости от количества отрезков ( $t = 10$  лет)

Объем ствола без коры	Количество отрезков на ствол	О ш и б к и в %				
		системати- ческие	среднеква- дратические случайные $\pm \sigma$	наибольшие		
				от+	до—	ампли- туда
Конечный	21—33	+0,05	0,45	1,1	0,8	1,9
$V_a$	10—16	-0,40	0,93	1,7	2,0	3,7
	5—8	-1,43	1,28	0,7	4,2	4,9
Начальный	21—33	+0,06	0,55	1,5	0,8	2,3
$V_{a-t}$	10—16	-0,55	1,22	1,8	2,6	4,4
	5—8	-1,34	1,61	1,3	5,0	6,3

Обращает на себя внимание то, что как среднеквадратические, так и наибольшие, выраженные в процентах, ошибки в измерении началь-

ного объема оказались более высокими, чем при измерениях конечного; что средняя ошибка в определении объема, принимаемая равной  $\pm 1\%$ , при количестве отрезков 21—33 штуки по существу представляет собой предельную ошибку, и лишь при количестве отрезков 10—16 — случайную среднеквадратическую.

Полное совпадение точности определения объема ствола в начале и конце наблюдений получилось при числе отрезков 21—33 только в 15% случаев, а при меньшем числе отрезков в 9—12% случаев.

Соответствующие этим измерениям ошибки (выраженные в процентах) в определении величины текущего объемного прироста приводятся в табл. 2 ( $t = 10$  лет).

Таблица 2

Относительные ошибки  
в определении текущего прироста по объему ствола

Количество отрезков на ствол	О ш и б к и в %			
	систематические	среднеквадратические случайные $\pm \sigma$	наибольшие	
			от+	до—
21—33	+0,02	1,26	3,3	3,1
10—16	-0,62	1,85	3,5	4,0
5—8	-1,25	2,74	7,8	8,4
1	-1,10	9,40	19,8	25,0

Среднеквадратическая случайная ошибка при числе отрезков более 20 составила  $\pm 1,26\%$ , а при числе отрезков 10—16 штук  $\pm 1,85\%$ ; даже при числе отрезков 5—8 штук она составила только  $\pm 2,74\%$ . Наибольшие же ошибки соответственно количествам отрезков практически оказались равными  $\pm 3\%$ ,  $\pm 4\%$  и  $\pm 8\%$ .

При определении прироста по одному сечению на середине начальной высоты  $z_0 = (q_1 - q_2)h$  средняя ошибка отдельного наблюдения оказалась равной  $\pm 9,4\%$ , а наибольшие — 20—25%.

Определение конечного и начального запасов древостоя выборочным методом (путем механического отбора) производилось по 10, 15, 20 и 25 учетным деревьям, вырубленным с четырех сосновых пробных площадей; стволы разбивались в среднем на 10—12 отрезков. Всего было образовано 172 выборки. Средний возраст древостоев составлял 26, 45, 64, 80 лет.

Результаты получились такие:

1. При одном и том же объеме выборки точность определения запаса для древостоев 60—80 лет заметно выше, чем для более молодых — 26—45 лет, а конечный запас, как правило, определяется точнее, чем начальный.

2. Для целей определения запаса механический отбор 10 учетных деревьев следует считать недостаточным, так как ошибки могут достигать 10—15%.

Отбор же 25 учетных деревьев для определения запаса обеспечивает достаточно точные результаты с ошибкой в пределах  $\pm 5\%$ , при среднеквадратической  $\pm 2—3\%$ .

Из всего следует, что выводы, которые были сделаны относительно объема стволов, применимы и для определения запаса древостоев.

Если допустить, что конечная величина объема ствола (или запаса древостоя) определена точно ( $p_1 = 0$ ), а начальная — приближенно,

с некоторой ошибкой  $p_2$  (этот случай встречается при определении текущего прироста по конечному видовому числу  $F_a$  (когда конечный объем  $V_a$  определяется точно, а начальный  $V_{a-t}$  — приближенно:  $V_{a-t} = g_{a-t} h_{a-t} F_a$ ) из формулы  $z_v = V_a - ghF$ ), то формула (9) принимает вид:

$$p_z = -(r_v - 1) p_2 \text{ или } p_z = -\left(\frac{100}{p_v} - 0,5\right) p_2. \quad (14)$$

Если в этом случае принять  $p_2 = 1\%$ , то ошибка в определении текущего периодического прироста составляет  $9\%$  при  $r_v = 10$  ( $p_v = 10,5\%$ ) и  $-19\%$  при  $r_v = 20$  ( $p_v = 5,1\%$ ).

### Анализ вопроса о точности определения процента текущего объемного прироста

Принято считать, что как абсолютная величина текущего объемного прироста (или запаса древостоя), так и его процент, определяются одинаковой степенью точности.

Однако, такое утверждение, строго говоря, справедливо лишь для случая, когда конечный и начальный объемы ствола или запас древостоя измерены точно, без ошибок, что может быть лишь случайно, в единичных случаях.

Фактически же процент текущего периодического прироста будет вычислен по формуле

$$p_z = 200 \frac{V_a - V_{a-t} + (x - y)}{V_a + V_{a-t} + (x + y)}, \quad (16)$$

когда оба объема преувеличены, и

$$p_z = 200 \frac{V_a - V_{a-t} - (x - y)}{V_a + V_{a-t} + (x + y)}, \quad (17)$$

когда оба объема преуменьшены.

Если ошибки  $x$  и  $y$  равны по величине и знаку ( $x = y$ ), то абсолютная величина текущего объемного прироста определяется точно, так как при этом условии в числителях формул (16) и (17)  $u = x - y = 0$ ; однако, даже в этом случае процент прироста определяется неточно, ибо он существенно зависит от стоящей в знаменателях суммы вычисленных объемов (или запасов древостоя). Но в общем случае величины и знаки ошибок  $x$  и  $y$  не совпадают, поэтому нет оснований утверждать, что абсолютная величина текущего объемного прироста и процент прироста определяются с одинаковой степенью точности.

Получилось противоречие, вызванное разными способами вычисления величин: одна величина определяется как частное, а другая — как разность. В этом и заключается причина некоторого несовпадения в точности определения абсолютной и процентной величины текущего объемного прироста: процент прироста в общем определяется несколько точнее, чем абсолютная величина прироста.

Но получающаяся разность в точности определения величин несущественна, как это можно видеть из сопоставления количественных показателей точности, приводимых в табл. 2 и 3.

Практическая точность определения процента объемного прироста стволов (по данным измерений упомянутых выше 35 сосен) характеризуется показателями, представленными в табл. 3.

Таблица 3

Количество отрезков на ствол	Относительные ошибки в определении процента объемного прироста стволов			
	О ш и б к и в %			
	систематические	среднеквадратические случайные $\pm \sigma$	наибольшие	
от +			до —	
21—33	—0,01	1,20	2,5	2,8
10—16	+0,03	1,72	2,8	3,1
5—8	+0,13	2,72	6,7	5,8
1	—0,53	7,90	25,0	14,5

В наиболее часто встречающемся в практике случае, когда число отрезков на стволе составляет 10—16 штук, случайные ошибки в определении процента прироста отдельного ствола составили  $\pm 1,7\%$ , а предельные не превосходят 3,1%.

При уменьшении числа отрезков на стволе до 5—8, наибольшие ошибки могут достигать  $\pm 6—7\%$  при средней случайности  $\pm 2,7\%$ . Систематические ошибки практически отсутствуют.

Определение же процента прироста по объему ствола как процента прироста по площади сечения на середине начальной (бывшей) высоты или, что то же, по таблице Пресслера I (для срубленных стволов), в среднем дало преуменьшение — 0,5% при средней квадратической ошибке равной  $\pm 7,9\%$ . Отметим, что для 60-летних стволов сосны средняя ошибка получилась + 14%, а для 120—150-летних — 2,4%.

Практическая точность определения текущего прироста по запасу древостоя будет рассмотрена в особой статье.

### Выводы

1. Статистическая формула ошибки разности средних при большом числе наблюдений неприменима для целей определения возможной ошибки объемного текущего прироста ствола и древостоя.

2. Начальные и конечные объемы ствола и запасы древостоя даже одним и тем же способом определяются, как правило, с различной точностью.

3. Текущий объемный прирост определяется точно, если конечный и начальный объемы ствола (или запасы древостоя) вычислены с одинаковой абсолютной ошибкой.

Если же объем ствола (или запас древостоя) в начале и конце наблюдений был установлен с одной и той же точностью (по величине и знаку), определяется и текущий прирост (в соответствии с формулой 9), но величина процента текущего прироста при этом получится правильной.

4. Абсолютный и процентный текущий прирост отдельного ствола определяется практически с одинаковой ошибкой в пределах:  $\pm 3\%$  при числе отрезков на ствол 21—33 штуки,  $\pm 3—4\%$  при числе отрез-



ков 10—16 штук и  $\pm 7-8\%$  при 5—8 отрезках на ствол. Средние случайные ошибки составляют соответственно:  $\pm 1,2-1,3\%$ ,  $\pm 1,7-1,8\%$  и  $\pm 2,7\%$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

[1]. И. М. Науменко. Анализ методов определения текущего объемного прироста отдельных деревьев. Научные труды Воронежского лесохозяйственного института, т. X, 1948. [2]. И. М. Науменко. Достоверно ли определение текущего прироста насаждений по моделям. «Лесное хозяйство» № 7, 1940. [3]. F. Loetsch. Das Tariffdifferenzverfahren zur Massenzuwachsermittlung. Anwendung in der Praxis und im Versuchswesen. Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen. № 3/4, 5/6, 1954.

Поступила в редакцию  
23 января 1958 г.