

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Мартынов М. А., Вылегжанин К. А. Рентгенография полимеров.— М.: Химия, 1972.— 93 с. [2]. Мелех М. В., Петрова В. В., Гелес И. С. Исследование целлюлозы коры методами рентгеноструктурного анализа // Химия древесины.— 1987.— № 6.— С. 52—58. [3]. Петрова В. В., Мелех М. В. Изучение структурного состояния целлюлозы коры и древесины сосны, по сравнению с елью, методами рентгенографии // Химия и технология переработки древесины и коры.— Петро-заводск, 1990.— С. 67—74. [4]. Jaume G., Knolle H. Beitrag zur empirischen röntgenographischen Bestimmung des Kristallinitätsgrades cellulosischen Stoffe // Das Papier.— 1964.— V. 18, N 6.— S. 249—255.

Поступила 23 ноября 1992 г.

УДК 676.017.42

В. И. КОМАРОВ

Архангельский государственный технический университет

### ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИЗГИБЕ

Представлена гипотеза упруго-пластического деформирования в зоне сжатия при изгибе образцов целлюлозно-бумажных материалов. Показана возможность использования треугольно-трапециевидальной эпюры для расчета слоя структуры материала, в котором возникает предельное состояние.

A hypothesis of the resilient-plastic deforming of pulp-and-paper sample materials in the zone of compression when bending has been set up. The possibility of applying the triangle-trapezium orthographic pure projection for the calculation of the material structure layer in which strain occurs is revealed.

Жесткость при изгибе является важной характеристикой качества печатных и упаковочных видов бумаги, а также картона, предназначенного для изготовления тары. Низкая жесткость при изгибе необходима для таких материалов, как санитарно-гигиенические и специальные упаковочные виды бумаги, нотная бумага и др. [6, 15, 17, 19, 21, 22].

Существует достаточно много методов определения жесткости при изгибе. При их реализации измеряют следующие величины: сгибающее усилие; угол изгиба; прогиб; сгибающе-надламывающий угол; сумма величин работы, вызывающей упругие и пластические деформации; резонансная частота; модуль упругости или жесткость при изгибе. Обзор методов представлен в работах [9, 25, 27]. В настоящее время по данным фирмы «Lorentzen and Wettre» [28] наибольшее применение за рубежом нашли следующие: 1) метод измерения жесткости при деформировании на заданный угол консольно-закрепленного образца под воздействием силы, приложенной к его концу (используют для большинства видов бумаги); 2) резонансный метод, который позволяет определять жесткость при деформировании образца только в упругой области; 3) четырехточечный метод для испытания очень жестких материалов типа гофрированного картона. В отечественной практике для определения жесткости картона и бумаги используют в основном стандартный метод [5], заключающийся в определении силы, приложенной к свободному концу консольно-закрепленного образца и изгибающей его на определенный угол, а также метод, основанный на измерении деформации под воздействием заданной силы при испытании консольно-закрепленного образца. Его широко применяют в лабораторной практике [13].

Отметим, что при испытании образцов бумаги и картона на жесткость при изгибе с использованием статических методов, которые ими-

тируют реальные условия переработки и применения этих материалов, проявляются не только упругие, но и пластические деформации. Одними из первых эту проблему обсуждали Брехт, Бликштадт и Мюллер [24, 26]. Для лучшего понимания обсуждаемого вопроса приведем основные положения.

Расчет деформации изгиба консоли, когда не учитывается собственный вес образца, в общем случае приводит С. П. Тимошенко [20]. Пренебрегая влиянием поперечной силы на кривизну образца, представим зависимость между радиусом кривизны  $r$  и изгибающим моментом  $M$  в виде

$$1/r_{(x)} = M_{(x)}/EI, \quad (1)$$

где  $E$  — модуль упругости при изгибе;

$I$  — момент инерции поперечного сечения образца,

$$I = b\delta^3/12; \quad (2)$$

$b$  — ширина образца;

$\delta$  — толщина образца.

Отсюда получим для изогнутой оси образца дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{M_{(x)}}{EI} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}. \quad (3)$$

Для практических целей найдем уравнение изогнутой линии в виде

$$y = f(x), \quad (4)$$

где  $f$  — стрела прогиба образца.

Так как  $(dy/dx)^2 \ll 1$ , то приближенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{M_{(x)}}{EI} = d^2y/dx^2 \quad (5)$$

или

$$\frac{P(l-x)}{EI} = d^2y/dx^2, \quad (6)$$

где  $P$  — нагрузка на образец (действующая сила);

$l$  — длина образца.

После двукратного интегрирования получим выражение для определения стрелы прогиба:

$$f = y(l) = Pl^3/3EI; \quad (7)$$

$$EI = Pl^3/3f. \quad (8)$$

Приведенные выше уравнения являются приближенными, так как бумага — анизотропный упругопластический материал [2, 7, 10].

При изгибе образца под влиянием постоянно действующей нагрузки, в зависимости от ее величины и свойств структуры бумаги или картона возможны три вида деформирования; эпюры нормальных напряжений для которых показаны на рис. 1:

1) напряжение, приложенное к крайним сжатым и растянутым волокнам, ниже или равно пределу упругости при данных видах деформирования. В этом случае в сжатой и растянутой зонах образца возникают только упругие деформации (эпюра 1);

2) напряжение, приложенное к крайним сжатым и растянутым волокнам, несколько выше предела упругости. В сжатой и растянутой

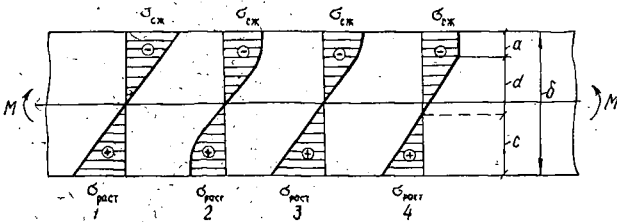


Рис. 1. Действительные (1—3) и упрощенная (4) эпюры нормальных напряжений

зонах возникают упруговязкие (замедленноупругие) деформации (эпюра 2);

3) напряжение крайнего растянутого волокна ниже или равно пределу упругости, а напряжение крайнего сжатого волокна выше предела упругости при сжатии (эпюра 3).

Испытания на изгиб проводят по схеме прибора ЖБИ-1. Для дальнейших рассуждений примем, что бумага является упруговязкопластическим материалом, который при изгибе в растянутой зоне сечения стержня работает упруго вплоть до разрыва крайних волокон, а в сжатой — упругопластически. [21]. Ф. П. Белянкин [3] предложил для расчетов такого материала использовать упрощенную эпюру (эпюра 4). В работе [8] указывается на экспериментально установленный факт, когда в случае упругопластического изгиба закон плоских сечений сохраняется. Поэтому деформации линейно зависят от координаты  $y$ . Зона пластических деформаций распространяется внутрь сечения.

Для определения размеров  $a$ ,  $d$ ,  $c$  для эпюры 4 воспользуемся следующими уравнениями [18]:

$$ba\sigma_{сж} + b\frac{d}{2}\sigma_{сж} - b\frac{c}{2}\sigma_{раст} = 0;$$

$$a + d + c = \delta;$$

$$\sigma_{сж}/\sigma_{раст} = d/c,$$

где  $\sigma_{сж}$ ,  $\sigma_{раст}$  — соответственно напряжения при сжатии и растяжении.

Решая эти уравнения совместно, получаем

$$a = \delta \frac{n_0 - 1}{n_0 + 1}; \quad (9)$$

$$d = \delta \frac{2}{(n_0 + 1)^2}; \quad (10)$$

$$c = \delta \frac{2n_0}{(n_0 + 1)^2}; \quad (11)$$

$$n_0 = \sigma_{раст}/\sigma_{сж}. \quad (12)$$

Таким образом, зная  $\sigma_{раст}$  и  $\sigma_{сж}$ , можно оценить образование предельного состояния в зоне сжатия при изгибе образца.

В работе [9] было показано, что модуль упругости  $E_{изг}$ , рассчитанный по уравнению

$$E_{изг} = \frac{12EI}{b\delta^3}, \quad (13)$$

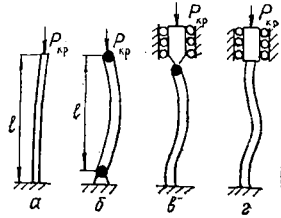
во всех исследуемых случаях меньше модуля упругости  $E_1$ , определенного резонансным методом. Дальнейшие исследования показали, что эта закономерность наблюдается и при сравнении  $E_{изг}$  и  $E_1$ , получен-

ного обработкой кривой «напряжение — деформация» при испытании на растяжение [11, 12]. Обнаруженный эффект может быть интерпретирован двояко: во-первых, при изгибе напряжения растяжения и сжатия в крайних слоях образца превышают предел упругости; во-вторых, предел упругости при сжатии крайнего слоя ниже предела упругости при растяжении, что вызывает образование предельного состояния только в сжатой области. В этом случае в области сжатия после достижения максимального напряжения в крайнем слое плоскости листа может возникнуть чрезмерная деформация, но не в результате каких-либо остаточных изменений, а путем возникновения бокового перемещения, называемого потерей устойчивости. Классический случай обсуждался в работе [16]. Для прямого стержня, а в случае целлюлозно-бумажных материалов — отдельного волокна определенной длины, закрепленного на одном конце и свободного на другом, критическая нагрузка, вызывающая потерю устойчивости

$$P_{кр} = \pi^2 EI / 4l^2 \tag{14}$$

Из этого уравнения видно, что при определенной длине волокна потеря устойчивости регламентируется лишь жесткостью и не зависит от предела текучести материала. Возможные способы крепления стержней показаны на рис. 2. Взаимодействие волокна в структуре бумаги или картона имеет более сложный характер.

Рис. 2. Критическая нагрузка для потери устойчивости упругих прямых стержней при различных  $P_{кр}$ : а —  $P_{кр} = \pi^2 EI / 4l^2$ ; б —  $P_{кр} = \pi^2 EI / l^2$ ; в —  $P_{кр} = 20,2 EI / l^2$ ; г —  $P_{кр} = 4\pi^2 EI / l^2$



Определение реальных напряжений, возникающих в крайних слоях при испытании на изгиб образцов целлюлозы, бумаги и картона — задача крайне сложная. Принимая, что гипотеза плоских сечений справедлива и при изгибе целлюлозно-бумажных материалов, для расчета напряжений в зоне растяжения может быть использовано уравнение Навье

$$\sigma = M / W, \tag{15}$$

где  $M$  — изгибающий момент;

$W$  — момент сопротивления поперечного сечения образца,  $W = b\sigma^2 / 6$ .

Данные, представленные в табл. 1, показывают, что напряжение  $\sigma_{раст}$ , возникающее в крайнем слое образца, подвергнутого изгибу, в несколько раз ниже, чем предел упругости  $\sigma_1$  материала при испытании на растяжение.

В зоне сжатия при испытании на изгиб механическое поведение целлюлозно-бумажных материалов гораздо сложнее. Экспериментально установлено, что модуль упругости  $E_1$  материала при испытании на растяжение выше модуля упругости при изгибе  $E_{изг}$ . Можно предположить, что

$$E_{изг} = (E_1 + E_{сж}) / 2, \tag{16}$$

где  $E_{сж}$  — модуль упругости при сжатии материала в плоскости листа.

Таблица 1

Материал	$F$ , мН	$l$ , см	$\delta$ , см	$\sigma_{\text{раст}}$ , кПа	$\sigma_{\text{раст}}$ , МПа, при растяже- нии	
	при изгибе					
Картон машинного производства с массой 1 м <sup>2</sup> , г:	175	62,5	2,5	0,0295	2,16	19,0
	200	62,5	2,5	0,0370	1,37	17,2
Сульфатная небеленая целлюлоза* со сте- пенью помола, °ЩР:	16	3,12	2,5	0,0161	0,15	2,2
	25	3,12	2,5	0,0124	0,25	10,3
	40	3,12	2,5	0,1140	0,30	12,6
	60	3,12	2,5	0,1020	0,38	13,3

\* Образцы лабораторного изготовления с массой 1 м<sup>2</sup> 75 г.

Отметим парадоксальность поведения целлюлозно-бумажных материалов при сжатии в плоскости листа. Под действием напряжений, в 1000 раз меньших тех, при которых на растяжение материал работает упруго, в зоне сжатия, видимо, возникает предельное состояние. Для расчета величины  $n_0$  (см. уравнение (12)) может быть использовано отношение

$$n_0 = E_1 / E_{\text{сж}}. \quad (17)$$

В табл. 2 приведены уравнения для расчета коэффициентов  $K_1$  —  $K_3$  и значения коэффициентов при фиксированных  $n_0$ , что позволяет получить зависимость  $K = f(n_0)$ , которая изображена на рис. 3.

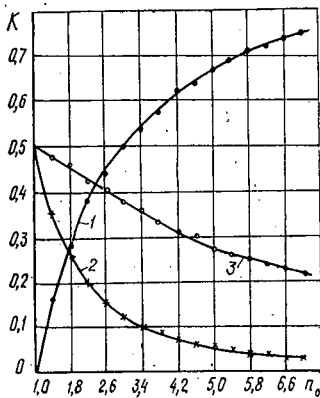


Рис. 3. Диаграмма расчета коэффициентов  $K$  в зависимости от  $n_0$ :  $K_1$  (1);  $K_2$  (2);  $K_3$  (3)

В табл. 3 представлены данные испытаний образцов следующих материалов: картон для гладких слоев гофрированного картона (крафт-лайнер); сульфатная небеленая целлюлоза лабораторного изготовления с массой 1 м<sup>2</sup> 75 г и книжно-журнальная некаландрированная бумага для офсетной печати (1 — хвойная сульфатная целлюлоза + лиственная сульфатная целлюлоза + хвойная химикотермомеханическая масса (ХТММ) + лиственная ХТММ; 2 — лиственная сульфатная целлюлоза + хвойная ХТММ + лиственная ХТММ; 3 — хвойная сульфатная целлюлоза + лиственная сульфатная целлюлоза + хвойная ХТММ + лиственная ХТММ + термомеханическая масса (ТММ); 4 — лиственная сульфатная целлюлоза + хвойная ХТММ + лиственная ХТММ + ТММ;

Таблица 2

Эпюра нормальных напряжений*	Коэффициент	Значения коэффициентов при $n_0$														
		1,4	1,8	2,2	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0
	$K_1$	0,17	0,28	0,38	0,44	0,50	0,54	0,58	0,62	0,64	0,67	0,69	0,71	0,72	0,74	0,75
	$K_2$	0,35	0,26	0,20	0,15	0,12	0,10	0,09	0,07	0,06	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,03
	$K_3$	0,48	0,46	0,42	0,41	0,38	0,36	0,33	0,31	0,30	0,27	0,26	0,25	0,24	0,23	0,22

\*  $E_{сж} = 2 E_{шг} - E_1$  (18);

$a = \delta \frac{n_0 - 1}{n_0 + 1} = K_1 \delta$  (19);

$d = \delta \frac{2}{(n_0 + 1)^2} = K_2 \delta$  (20);

$c = \delta \frac{2 n_0}{(n_0 + 1)^2} = K_3 \delta$  (21);

$n_0 = \sigma_{раст} / \sigma_{сж} = E_1 / E_{сж}$  (22)

Таблица 3

Материал	при изгибе					при растяжении				
	$\frac{\delta EI \times 10^6}{M}$	$\frac{EI}{MН \times CM^2}$	$E_{плг}$ , МПа	$E_{сж}$ , МПа	$n_0$	$\frac{a \times 10^6}{M}$	$\left(\frac{a}{\delta EI} \times 100\right) \%$	$\frac{\delta E \times 10^6}{M}$	$\sigma_{п}$ , МПа	$E_{п}$ , МПа
Картон машинного производства с массой 1 м <sup>2</sup> , г:	175	1500,0	4790	4139	1,3	38	13	251	19,0	5441
	200	2290,0	3630	2699	1,7	95	26	342	17,2	4566
	16	42,8	828	631	1,6	37	23	179	2,2	1025
Сульфатная небеленая целлюлоза со степенью помола, °ШР:	25	68,6	2920	666	7,8	96	77	125	10,3	5174
	40	72,5	3880	1454	4,3	71	62	115	12,6	6306
	60	60,8	4410	2164	3,1	53	51	106	13,3	6656
Книжно-журнальная бумага для офсетной печати с композицией по волокну:	1	116	49,6	2577	1666	41	35	110	13,0	3488
	2	117	54,0	2700	2084	27	23	126	14,2	3316
	3	132	68,4	2372	1870	28	21	126	10,9	2874
	4	111	78,2	4582	4220	9	8	114	17,8	4944
	5	124	97,8	4058	3811	1,1	8	125	12,1	4305

5 — хвойная сульфатная целлюлоза + лиственная сульфатная целлюлоза + хвойная ХТММ). Полученные нами экспериментальные данные показывают, что математический аппарат, разработанный для подвергаемых изгибу упругопластических материалов, можно использовать и для оценки предельного состояния в зоне сжатия при испытании целлюлозно-бумажных материалов на изгиб.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Аким Э. М. Обработка бумаги.— М.: Лесн. пром-сть, 1979.— 232 с. [2]. Бабури С. В., Киприанов А. И. Реологические основы процессов целлюлозно-бумажного производства.— М.: Лесн. пром-сть, 1983.— 192 с. [3]. Белянкин Ф. П. Пластические деформации дерева при изгибе // Тр. 1-й Всесоюз. конф. по прочности