

ОУДК 624.011.14:624.042.1/3

*Б.В. Лабудин*

## **К ОБОСНОВАНИЮ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ КЛЕЕНОЙ ДРЕВЕСИНЫ КАК ОРТОГОНАЛЬНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА**

С учетом классических гипотез, в основе которых лежит пакетная гипотеза, и принятых ограничений и допущений для расчета массивных конструкций из клееной древесины обоснована расчетная математическая модель клееной древесины как трансверсально-изотропного материала.

*Ключевые слова:* клееная древесина, расчетная математическая модель, анизотропия, трансверсально-изотропный материал, эффективный модуль упругости, энергетическая континуализация.

Исследованием физико-механических свойств древесины стали заниматься в XIX в. В своих первых работах Савар (1830) и Сен-Венан (1856) уже рассматривали древесину как неоднородный материал. Нормирование прочностных и упругих свойств, выполненное Д.И. Журавским и В.Г. Шуховым, обеспечивало широкое применение древесины в большепролетных сооружениях и зданиях самого различного назначения. Принципы построения гипотетической двумерной теории многослойных сред базируются на двух подходах: в первом принята пакетная гипотеза для всей толщины массива, во втором – гипотеза ломаной нормали. Реже для построения теории многослойных сред используют аналитический, в том числе асимптотический метод [1, 3, 9 – 11 и др.].

Исходя из физической модели цельной и клееной древесины как анизотропного материала со слоистой структурой при проведении расчетов необходимо ввести ряд ограничений и допущений: клееную древесину рассматривают как однородный (квазигомогенный) материал ввиду малой толщины клеевых прослоек, соединяющих слои заготовок древесины между собой; различие упругих характеристик в отдельных слоях клееной древесины, произвольно ориентированных в поперечном сечении пакета, находится в пределах статистического разброса, т. е. физико-механические свойства в пределах сечения осреднены; влияние локальных дефектов клееной древесины (сучки, косослой, непрочлей, зубчато-шиповые стыки и др.), находящиеся в пределах норм, не учитывают; компоненты напряжений и деформаций считают связанными линейно, т.е. материал подчиняется обобщенному закону Гука до определенного предела нагружения; начальные напряжения, возникающие при изменении эксплуатационных воздействий (температура, влажность и др.), также не учитывают, так как это предусмотрено, согласно норм [8], на стадии конструктивного расчета.

Общеизвестно, что для малых прямоугольных образцов, которые называют образцами «чистой» древесины, без пороков и ориентированных при отборе так, что их продольная  $x$ , тангенциальная  $z$  и радиальная  $y$  грани совпадают соответственно с осями упругой симметрии  $a$ ,  $t$ ,  $r$ , справедлива феноменологическая ортотропная модель (рис. 1). Она использовалась древесиноведами и механиками [2, 4 – 6] и имеет многочисленные экспериментальные подтверждения в работах А.Н. Митинского, А.А. Рабиновича, А.П. Павлова, Е.К. Ашкенази, Н.Л. Леонтьева, Б.Н. Уголева, Ю.С. Соболева и др. При этом кривизной слоев, а также соотношением в них количества ранней и поздней древесины пренебрегают.

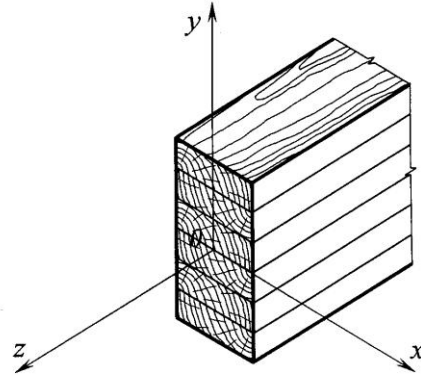
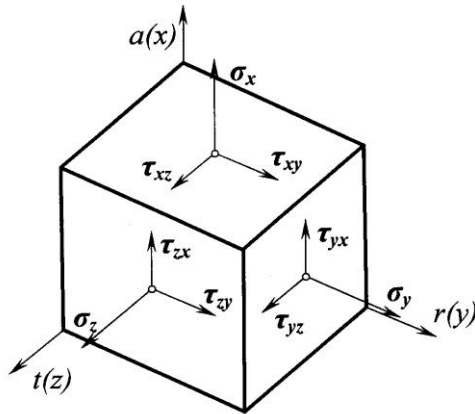


Рис. 1. Ориентация элементарного объема «чистой» древесины в декартовых осях  $x, y, z$ , совпадающих с осями упругой симметрии  $a, r, t$ , и обозначение напряжений

Рис. 2. Главные направления упругой симметрии клееного пакета как трансверсально-изотропного материала ( $x_0y_0$  – плоскость изотропии)

Запишем закон Гука для тел с ортогональной анизотропией в общепринятых обозначениях [2, 5]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \nu_{xx} / E_x \bar{\sigma}_x - \nu_{yx} / E_y \bar{\sigma}_y - \nu_{zx} / E_z \bar{\sigma}_z; & \gamma_{xy} &= \nu_{xy} / G_{xy} \bar{\tau}_{xy}; \\ \varepsilon_y &= -\nu_{xy} / E_x \bar{\sigma}_x + \nu_{yy} / E_y \bar{\sigma}_y - \nu_{zy} / E_z \bar{\sigma}_z; & \gamma_{yz} &= \nu_{yz} / G_{yz} \bar{\tau}_{yz}; \\ \varepsilon_z &= -\nu_{xz} / E_x \bar{\sigma}_x - \nu_{yz} / E_y \bar{\sigma}_y + \nu_{zz} / E_z \bar{\sigma}_z; & \gamma_{zx} &= \nu_{zx} / G_{zx} \bar{\tau}_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\varepsilon_i, \gamma_{ij}$  – линейные и угловые деформации;

$E_i$  – модули продольной упругости (модули Юнга) при растяжении-сжатии в направлении оси  $i = x, y, z$ ;

$\nu_{ij}$  – коэффициенты поперечной деформации (коэффициенты Пуассона), характеризующие сокращение тела в направлении осей  $i$  при растяжении в направлении  $j$ ;

$G_i$  – модули сдвига в плоскостях упругой симметрии  $i0j$  ( $i = x, y, z; j = x, y, z$ ).

С учетом того, что  $E_x \nu_{xy} = E_y \nu_{yx}; E_x \nu_{xz} = E_z \nu_{zx}; E_y \nu_{yz} = E_z \nu_{zy}$ , из 12 технических постоянных независимыми будут только 9.

Рассмотрим склеенный пакет заготовок, продольно-ориентированных относительно тонких слоев, волокна которых совпадают с геометрической осью  $z$  (рис. 2). Учитывая, что поперечная ориентация слоев в пакете произвольна и специально ее не подбирают, случайное расположение деталей в пакете дает произвольный набор упругих характеристик в смежных слоях. Однако неясно, насколько справедливо использование для деревосклеенных элементов модели трансропного тела (плоскость изотропии перпендикулярна оси  $z$ ).

Анализ известных отечественных и зарубежных работ [2, 5–7] показал, что значения  $E_i$  и  $G_i$ , связанные с направлением действующих сил (для хвойных пород древесины), в тангенциальном и радиальном направлениях весьма близки. При этом трансропная модель материала клееной древесины успешно реализуется в нормах Австрии, Великобритании, Германии, Канады, Норвегии, США и др. стран.

В нашем случае к клееной древесине вполне применима модель трансверсально-изотропного тела, тем более, что это предположение обосновано в выше перечисленных работах.

Обозначим:

$$E_x = E_0; E_y = E_z = E_1; G_{xy} = G_{zx} = G_1; G_{yz} = G_0; \mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_0; \mu_{zx} = \mu_{yz} = \mu_1. \quad (2)$$

Запишем обобщенный закон Гука для трансропного материала в более простом виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \left( \frac{1}{E_0} \overline{\sigma}_x - \frac{\mu_1}{E_1} \overline{\sigma}_y + \sigma_z \right); & \gamma_{xy} &= \left( \frac{1}{G_1} \overline{\tau}_{xy} \right); \\ \varepsilon_y &= -\frac{\mu_0}{E_0} \overline{\sigma}_x + \left( \frac{1}{E_1} \overline{\sigma}_y - \frac{\mu_1}{E_1} \overline{\sigma}_z \right); & \gamma_{yz} &= \left( \frac{1}{G_0} \overline{\tau}_{yz} \right); \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu_0}{E_0} \overline{\sigma}_x - \left( \frac{\mu_1}{E_1} \overline{\sigma}_y + \frac{1}{E_1} \overline{\sigma}_z \right); & \gamma_{zx} &= \left( \frac{1}{G_1} \overline{\tau}_{zx} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь число независимых упругих постоянных  $a_{ij}$  равно пяти, а  $G_0 = E_0/2(1 + \mu_1)$ .

На этих же гипотезах и допущениях может быть построена теория расчета элементов и конструкций из клееной древесины, основанная на принципах энергетической континуализации и разработанная в трудах В.В. Болотина и его школы [3]. Она базируется на предложенном Фойгтом обобщении классической теории упругости в перемещениях следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} L_{11}U + L_{12}v + L_{13}\omega + \lambda^2 \left( M_{11}U + M_{12}v + M_{13}\omega \right) &= X = 0; \\ L_{21}U + L_{22}v + L_{23}\omega + \lambda^2 \left( M_{21}U + M_{22}v + M_{23}\omega \right) &= Y = 0; \\ L_{31}U + L_{32}v + L_{33}\omega + \lambda^2 \left( M_{31}U + M_{32}v + M_{33}\omega \right) &= Z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $L_{jk}$  и  $M_{jk}$  ( $j = k = 1, 2, 3$ ) – соответственно линейные операторы 2-го и 4-го порядка;

$U, v, \omega$  – компоненты перемещений;

$\lambda$  – формально вводимый параметр длины

$$\lambda \approx h \sqrt{\psi(1-\psi)} \cdot \sqrt{E' / E''};$$

$\psi$  – коэффициент «армирования» (относительное объемное содержание древесины),  $\psi \approx 1$ ;

$E'$  – продольный модуль упругости древесины;

$E''$  – модуль упругости клеевого композита;

$h$  – толщина клеевого шва, мм;

$X, Y, Z$  – энергетически «размазанные» компоненты объемных сил.

Например, при толщине слоев древесины 20 мм и клея 0,1 мм  $\psi = 0,995$ .

Тогда  $\lambda = 0,01 \sqrt{0,995(1-0,995)} \cdot \sqrt{10000 / 2500} = 0,01 \cdot 0,07 \cdot 2 \approx 0,0014$  см.

Запишем систему уравнений (4) в более общем виде:

$$Lu + \lambda^2 Mu + X = 0, \quad (5)$$

где  $L$  и  $M$  – соответственно линейные операторы 2-го и 4-го порядка;

$u(x, y, z)$  – векторное поле перемещений;

$\lambda$  – малый параметр, имеющий размерность длины;

$X(x, y, z)$  – векторное поле объемных сил.

Поскольку толщина клеевого шва по сравнению с толщиной ламелей пренебрежимо мала, т.е.  $h \rightarrow 0$ , число граничных условий уменьшится, а оставшиеся условия обеспечат существование и единственность решения  $U_0(x, y, z)$  в новой системе уравнений:

$$LU_0 + X = 0. \quad (6)$$

Приведенный математический аппарат в сочетании с пакетной гипотезой может быть использован для решения целого ряда задач, где принцип энергетической континуализации позволяет использовать осредненные параметры материала, а порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений не зависит от числа слоев массива клееной древесины.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алфутов, Н.А.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов [Текст] / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.
2. *Ашкенази, Е.К.* Анизотропия конструкционных материалов [Текст]: справ. / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – М.: Машиностроение.– Л., 1980. – 247 с.
3. *Болотин, В.В.* Механика многослойных конструкций [Текст] / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
4. *Лабудин, Б.В.* Расчет плитно-ребристых конструкций с упруго-податливыми связями [Текст] / Б.В. Лабудин // Лесн. журн. – 1992. – № 1. – С. 67–72. – (Изв. высш. учеб. заведений).
5. *Лехницкий, С.Г.* Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. *Светозарова, Е.И.* Некоторые вопросы совершенствования клееных деревянных конструкций в процессе изготовления [Текст] / Е.И. Светозарова, Е.Н. Серов, Б.В. Лабудин // Лесн. журн. – 1985. – № 2. – С. 65–68. – (Изв. высш. учеб. заведений).
7. Справочное руководство по древесине [Текст] / Лаборатория лесных продуктов США: пер. с англ. – М.: Лесн. пром-сть, 1979. – 544 с.
8. СНиП II-25–80. Деревянные конструкции. Нормы проектирования [Текст]. – М.: Стройиздат, 1982. – С. 65.
9. *Ульяшин, А.Н.* Напряженно-деформированное состояние слоистых пластин [Текст] / А.Н. Ульяшин // Изв. АН СССР. МТГ. – 1979. – № 1. – С. 145–154.
10. *Уманский, А.А.* Строительная механика самолета [Текст] / А.А. Уманский. – М.: Оборонгиз, 1961. – 529 с.
11. *Филин, А.П.* Элементы теории оболочек [Текст] / А.П. Филин. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Стройиздат, 1987. – 384 с.

Архангельский государственный  
технический университет

*B. V. Labudin*

#### **To Substantiation of Estimated Model of Laminated Wood as Orthogonal Transversal-isotropic Material**

The estimated mathematical model of laminated wood is substantiated as transversal-isotropic material taking into account classic hypotheses based on packet hypotheses and approved limitations and assumptions for calculation of solid constructions from laminated wood.