

УДК 625.711.84+625.31

А.С. Миляев

Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет

Миляев Александр Сергеевич родился в 1936 г., окончил в 1959 г. Ленинградское высшее военное инженерно-техническое училище ВМФ, доктор технических наук, профессор, засл. работник высшей школы РФ, зав. кафедрой теоретической и строительной механики С.-Петербургского государственного лесотехнического университета. Имеет более 150 научных работ в области механики деформируемого твердого тела, в том числе механики силового взаимодействия конструкций и сооружений с грунтом при статических и динамических нагрузках.

E-mail: icffi@home.ru



АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРОМЕРЗАНИЯ СЛОИСТЫХ ОСНОВАНИЙ ЗИМНИХ ЛЕСОВОЗНЫХ ДОРОГ

Приводится алгоритм расчета глубины и скорости промерзания слоистых оснований зимних лесовозных дорог на базе текущих значений температуры воздуха и скорости ветра в данной местности. Алгоритм построен на численном решении нелинейной нестационарной задачи о теплопередаче в термодинамической системе «воздух – грунт» с учетом фазовых превращений поровой воды в лед, а также зависимости теплофизических характеристик грунтов от температуры.

Ключевые слова: зимние лесовозные дороги, теплопередача, промерзание оснований, фазовые превращения воды в лед, нелинейное нестационарное уравнение теплопроводности.

При создании блок-схемы алгоритма расчета промерзания оснований зимних лесовозных дорог рассмотрена замкнутая термодинамическая система (рис. 1), состоящая из слоев воздуха и грунта с известными физико-механическими и теплофизическими свойствами. Начальная температура и фазовое состояние системы предполагаются известными; температура воздуха изменяется по заданному закону; поверхности $y = 0$, $y = b$, $x = h_4$ тепло-изолированы. Требуется определить изменение температуры в системе в зависимости от координат, времени и изменения температуры воздуха и условий на ее границе.

Распространение теплоты в слоях грунта подчиняется известному уравнению теплопроводности [1]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v, \quad (1)$$

где H – энтальпия, Дж/м³;

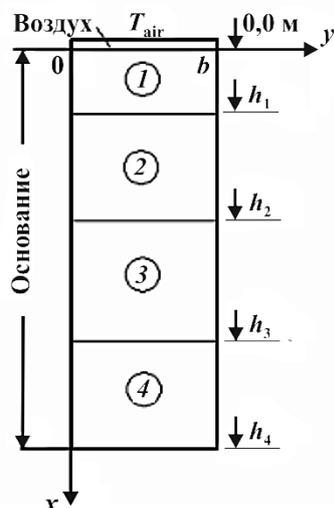
t – время, с;

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – теплопроводность в направлении осей x, y, z , Вт/м²;

T – температура, °С;

q_v – мощность внутренних источников энергии, Вт/м³.

Рис. 1. Общая расчетная схема: 1–4 – слои грунтового основания; $h_1 - h_4$ – отметки подошв слоев; T_{air} – температура воздуха на поверхности основания, $T_{air} = T_{air}(t)$



Тепловые потоки через границы $y = 0$, $y = b$, $x = h_4$ отсутствуют:

$$Q(x, y, z, t) = 0.$$

Приращение энтальпии определяется выражением

$$\Delta H = \int_{T_b}^T \rho C(T) dT, \quad (2)$$

где T_b , T – начальное и текущее значения температуры, °С;

ρ – плотность грунта, кг/м³;

C – удельная теплоемкость, Дж/(кг·°С).

Внутренних источников энергии в системе нет ($q_v = 0$), однако в слоях грунта при замерзании поровой воды выделяется теплота кристаллизации (Q_{gr} , Дж/м³), которая учитывается в расчете по СНиП 2.02.04–88 [5]:

$$Q_{gr} = Q_w(W_{gr} - W_m)\rho_s, \quad (3)$$

где Q_w – теплота кристаллизации воды, $Q_w = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг;

W_{gr} – суммарная влажность грунта, доли единицы;

W_m – влажность мерзлого грунта между включениями льда, доли единицы;

ρ_s – плотность скелета грунта, кг/м³.

Принимаем, что Q_{gr} выделяется в интервале температур от -1 до 0 °С; $W_m = 0$.

На границе $x = 0$ происходит конвективный теплообмен по следующему закону:

$$Q = \alpha A(T_{air} - T_{gr}), \quad (4)$$

где Q – тепловой поток через границу $x = 0$;

α – коэффициент теплоотдачи (теплопритока);

A – площадь теплообмена (теплоотдачи);

T_{gr} – температура грунта на его поверхности.

Коэффициент α на границе «воздух–снег» и «воздух–лед» вычисляется по формулам СНиП 2.06.04–82 [4].

Уравнение (1) решается численным методом конечных элементов (КЭ). Для обеспечения устойчивости численной процедуры необходимо соблюдать определенное соотношение между «шагами» по времени Δt и пространству Δh [5]:

$$\frac{\lambda \Delta t}{\rho C (\Delta h)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (5)$$

где λ – теплопроводность в направлении распространения тепловой волны;
 Δh – приращение пространственной координаты в направлении распространения тепловой волны.

Вариационное уравнение теплопроводности (1) с присоединенными граничными условиями для выделенного объема V имеет следующий вид:

$$\int_V \left[\delta T \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) + \{L\}^{\text{Tms}} (\delta T) ([\Lambda] \{L\} T) \right] dV = \int_{S_2} \delta T q^* dS_2 + \int_{S_3} \delta T \alpha A (T_{\text{air}} - T) dS_3, \quad (6)$$

где δT – вариация температуры;
 Tms – оператор транспонирования;
 q^* – тепловой поток через поверхность S_2 , $q^* = -\{q\}^{\text{Tms}} \{\eta\}$;
 $\{q\} = -[\Lambda] \{L\} T$;
 q – вектор теплового потока через поверхность S_2 ;
 $\{\eta\}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S_2 ;
 $\alpha A (T_{\text{air}} - T)$ – конвективный тепловой поток через поверхность S_3 ,
 $\alpha A (T_{\text{air}} - T) = \{\eta\}^{\text{Tms}} [\Lambda] \{L\} T$;
 $[\Lambda]$ – локальная матрица теплопроводности,

$$[\Lambda] = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_x(x, y, z, T) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y(x, y, z, T) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z(x, y, z, T) \end{array} \right\|;$$

 $\{L\}$ – оператор дифференцирования,

$$\{L\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right\}^{\text{Tms}}.$$

Уравнение теплопроводности для одного конечного элемента (КЭ) получается при интегрировании уравнения (6) по поверхности S_2 и объему V_e :

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \rho C \{\Phi\} \{\Phi\}^{\text{Tms}} dV_e \{T_e\} + \int_{V_e} \rho [B]^{\text{Tms}} [\Lambda] [B] dV_e \{T_e\} = \\ & = \int_{S_2} \{\Phi\} q^* dS_2 + \int_{S_3} T_{\text{air}} \alpha A \{\Phi\} dS_3 - \int_{S_3} \alpha A \{\Phi\} \{T_e\} dS_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где ρ – плотность;
 C – теплоемкость;
 $\{\Phi\}$ – интерполирующая функция элемента;
 V_e – объем конечного элемента;
 $\{\dot{T}_e\}$ – вектор производных по времени от узловых температур элемента,

$$\{\dot{T}_e\} = \{\Phi\} \dot{T} = \{\Phi\} \frac{\partial T}{\partial t};$$

$$[B] = \{L\} \{\Phi\}^{Tms};$$

$$\{T_e\} = \{\Phi\} T.$$

Уравнение (7) в матричном виде:

$$[C_e^t] \{\dot{T}_e\} + ([K_e^{tb}] + [K_e^{tc}]) \{T_e\} = \{Q_e^f\} + \{Q_e^c\}, \quad (8)$$

где $[C_e^t] = \int_{V_e} \rho C \{\Phi\} \{\Phi\}^{Tms} dV$ – матрица теплоемкости КЭ;

$[K_e^{tb}] = \int_{V_e} \rho [B]^{Tms} [\Lambda] [B] dV$ – матрица теплопроводности КЭ;

$[K_e^{tc}] = \int_{S_3} \alpha A \{\Phi\} \{T_e\} dS_3$ – матрица поверхностной конвекции КЭ;

$\{Q_e^f\} = \int_{S_2} \{\Phi\} q^* dS_2$ – вектор теплового потока;

$\{Q_e^c\} = \int_{S_3} T_{air} \alpha A \{\Phi\} dS_3$ – вектор поверхностной конвекции КЭ.

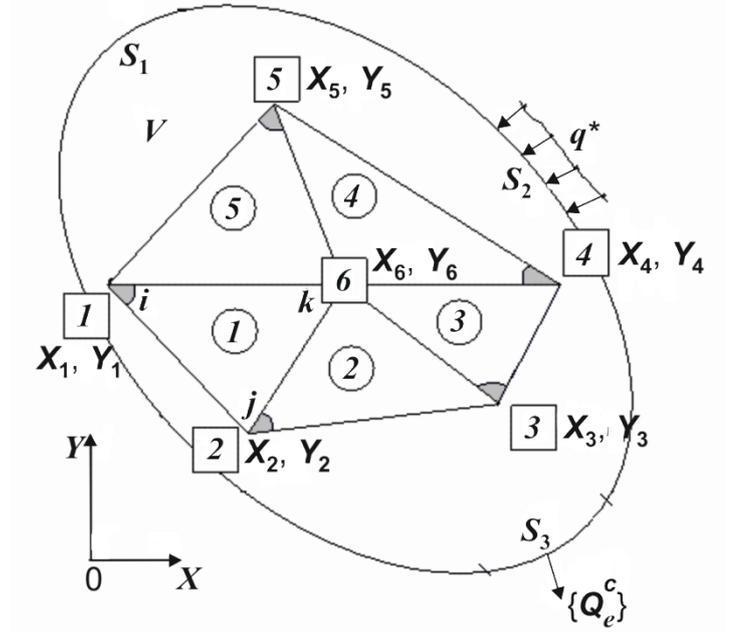
Уравнение теплопроводности для всей расчетной области строится с помощью матрицы инцидентности узлов и сетки КЭ.

Рассмотрим определение матрицы инцидентности узлов КЭ для части расчетной области из пяти треугольных КЭ, представленной на рис. 2. Общий объем расчетной области – V . Номера КЭ (с 1 по 5) помещены в кружках; номера сетки узлов, образованных конечными элементами (с 1 по 6), – в квадратах; номера узлов в каждом КЭ (показано только в первом КЭ) обозначены i, j, k . Отмеченный заливкой угол в КЭ имеет номер i . Обход узлов в КЭ – против хода часовой стрелки. Координаты сетки узлов в общей системе координат OXY обозначены X_i, Y_i ($i = 1, \dots, 6$). На части поверхности S_1 расчетной области заданы температуры T_s , на части S_2 – тепловой поток q^* , на части S_3 – вектор поверхностной конвекции $\{Q_e^c\}$.

Температуры T_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) в узлах сетки КЭ принимают за искомые переменные, связь температур $T^{(e)}$ в любой точке КЭ с температурами T_m в узлах сетки определяет с помощью интерполирующих функций $\phi_n(x, y)$, $n = i, j, k$:

$$T^{(e)} = \phi_i^{(e)} T_i + \phi_j^{(e)} T_j + \phi_k^{(e)} T_k, \quad (9)$$

Рис. 2. Расчетная область из пяти треугольных КЭ



где $\varphi_n^{(e)}$ – интерполирующие функции, $\varphi_n^{(e)} = \frac{1}{2A} [a_n^{(e)} + b_n^{(e)} x + c_n^{(e)} y]$;
 $a_n^{(e)}, b_n^{(e)}, c_n^{(e)}$ – коэффициенты,

$$\begin{aligned} a_i^{(e)} &= X_j^{(e)} Y_k^{(e)} - X_k^{(e)} Y_j^{(e)}; & b_i^{(e)} &= Y_j^{(e)} - Y_k^{(e)}; & c_i^{(e)} &= X_k^{(e)} - X_j^{(e)}; \\ a_j^{(e)} &= X_k^{(e)} Y_i^{(e)} - X_i^{(e)} Y_k^{(e)}; & b_j^{(e)} &= Y_k^{(e)} - Y_i^{(e)}; & c_j^{(e)} &= X_i^{(e)} - X_k^{(e)}; \\ a_k^{(e)} &= X_i^{(e)} Y_j^{(e)} - X_j^{(e)} Y_i^{(e)}; & b_k^{(e)} &= Y_i^{(e)} - Y_j^{(e)}; & c_k^{(e)} &= X_j^{(e)} - X_i^{(e)}; \end{aligned} \quad (10)$$

$X_m^{(e)}, Y_n^{(e)}$ – координаты узлов КЭ в общей системе координат OXY
 $(m, n = 1, 2, \dots, 6)$;

T_n – температуры в узлах КЭ, $n = i, j, k$.

Связь температур $T^{(e)}$ в точках КЭ на рис. 2 с температурами T_m в узлах сетки определяется по формулам (9):

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \varphi_1^{(1)} T_1 + \varphi_2^{(1)} T_2 + \varphi_6^{(1)} T_6; \\ T^{(2)} &= \varphi_2^{(2)} T_2 + \varphi_3^{(2)} T_3 + \varphi_6^{(2)} T_6; \\ T^{(3)} &= \varphi_3^{(3)} T_3 + \varphi_4^{(3)} T_4 + \varphi_6^{(3)} T_6; \\ T^{(4)} &= \varphi_4^{(4)} T_4 + \varphi_5^{(4)} T_5 + \varphi_6^{(4)} T_6; \\ T^{(5)} &= \varphi_1^{(5)} T_1 + \varphi_5^{(5)} T_5 + \varphi_6^{(5)} T_6. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\varphi_n^{(e)}$ – интерполирующие функции, вычисляемые через координаты узлов КЭ в общей (глобальной) системе координат OXY :

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^{(1)} &= \frac{1}{2A} [X_2Y_6 - X_6Y_2 + (Y_2 - Y_6)x + (X_6 - X_2)y]; \\
 \varphi_2^{(1)} &= \frac{1}{2A} [X_6Y_1 - X_1Y_6 + (Y_6 - Y_1)x + (X_1 - X_6)y]; \\
 \varphi_3^{(1)} &= \frac{1}{2A} [X_1Y_2 - X_2Y_1 + (Y_1 - Y_2)x + (X_2 - X_1)y]; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varphi_1^{(5)} &= \frac{1}{2A} [X_6Y_5 - X_5Y_6 + (Y_6 - Y_5)x + (X_5 - X_6)y]; \\
 \varphi_5^{(5)} &= \frac{1}{2A} [X_1Y_6 - X_6Y_1 + (Y_1 - Y_6)x + (X_6 - X_1)y]; \\
 \varphi_6^{(5)} &= \frac{1}{2A} [X_5Y_1 - X_1Y_5 + (Y_5 - Y_1)x + (X_1 - X_5)y].
 \end{aligned} \tag{12}$$

В формулах (12) $2A$ равна удвоенной площади треугольного КЭ на рис. 2.

Поскольку интерполирующие функции φ_j обладают следующим свойством: $\varphi_j(x_i, y_i) = 1$, если $i = j$; $\varphi_j(x_i, y_i) = 0$, если $i \neq j$, то связь температур $T_n^{(e)}$ в узлах КЭ на рис. 2 с температурами T_m в узлах сетки определяется с помощью матрицы инцидентности $[\Gamma]$:

$$\{T^{(e)}\} = [\Gamma]\{T\}, \{T\} = [\Gamma]^{Tms}\{T^{(e)}\}. \tag{13}$$

$\{T^{(e)}\}$	=	$[\Gamma]$	$\{T\}$						
$T_1^{(1)}$	=	1	0	0	0	0	0	$\{T\}$	
$T_2^{(1)}$		0	1	0	0	0	0		
$T_3^{(1)}$		0	0	0	0	0	1		
$T_1^{(2)}$		0	1	0	0	0	0		
$T_2^{(2)}$		0	0	1	0	0	0		T_1
$T_3^{(2)}$		0	0	0	0	0	1		T_2
$T_1^{(3)}$		0	0	1	0	0	0		T_3
$T_2^{(3)}$		0	0	0	1	0	0		T_4
$T_3^{(3)}$		0	0	0	0	0	1		T_5
$T_1^{(4)}$		0	0	0	1	0	0		T_6
$T_2^{(4)}$		0	0	0	0	1	0		
$T_3^{(4)}$		0	0	0	0	0	1		
$T_1^{(5)}$		1	0	0	0	0	0		
$T_2^{(5)}$		0	0	0	0	1	0		
$T_3^{(5)}$		0	0	0	0	0	1		

В компьютерных программах матрицы инцидентности строят, сравнивая числовые значения глобальных координат узлов сетки с глобальными координатами узлов КЭ.

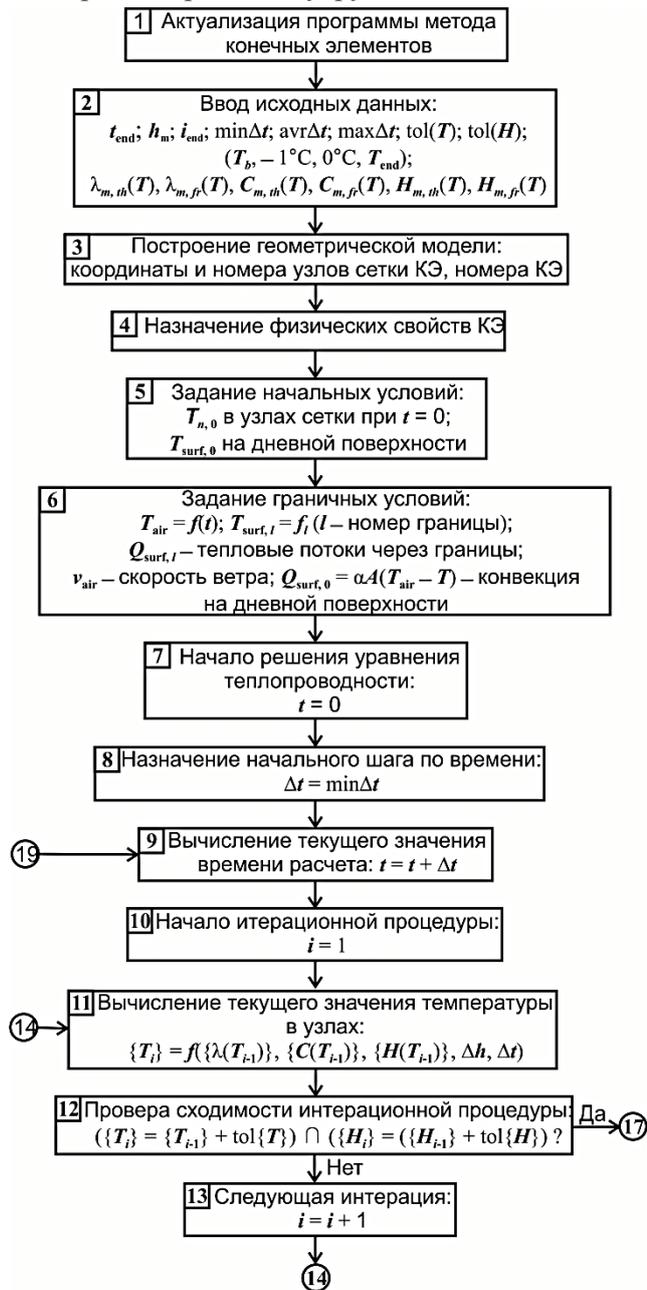
Располагая матрицей инцидентности для всей расчетной области, можно составить матричное уравнение для определения вектора температур $\{T\}$ в узлах сетки КЭ (κ – число КЭ во всей расчетной области):

$$[C^t]\{T\} + ([K^{tb}] + [K^{tc}])\{T\} = \{Q^f\} + \{Q^c\}, \tag{14}$$

где $[C^t] = [\Gamma]^{Tms} [[C_1^t], [C_2^t], \dots, [C_\kappa^t]] [\Gamma]$ – матрица теплоемкости;

$[K^{tb}] = [\Gamma]^{Trns} [[K_1^{tb}], [K_2^{tb}], \dots, [K_k^{tb}]] [\Gamma]$ – матрица теплопроводности;
 $[K^{tc}] = [\Gamma]^{Trns} [[K_1^{tc}], [K_2^{tc}], \dots, [K_k^{tc}]] [\Gamma]$ – матрица поверхностной конвекции;
 $\{Q^f\} = [\Gamma]^{Trns} \{\{Q_1^f\}, \{Q_2^f\}, \dots, \{Q_k^f\}\}^{Trns}$ – вектор теплового потока;
 $\{Q^c\} = [\Gamma]^{Trns} \{\{Q_1^c\}, \{Q_2^c\}, \dots, \{Q_k^c\}\}^{Trns}$ – вектор поверхностной конвекции.

Ниже, на рис. 3, приведена укрупненная блок-схема алгоритма.



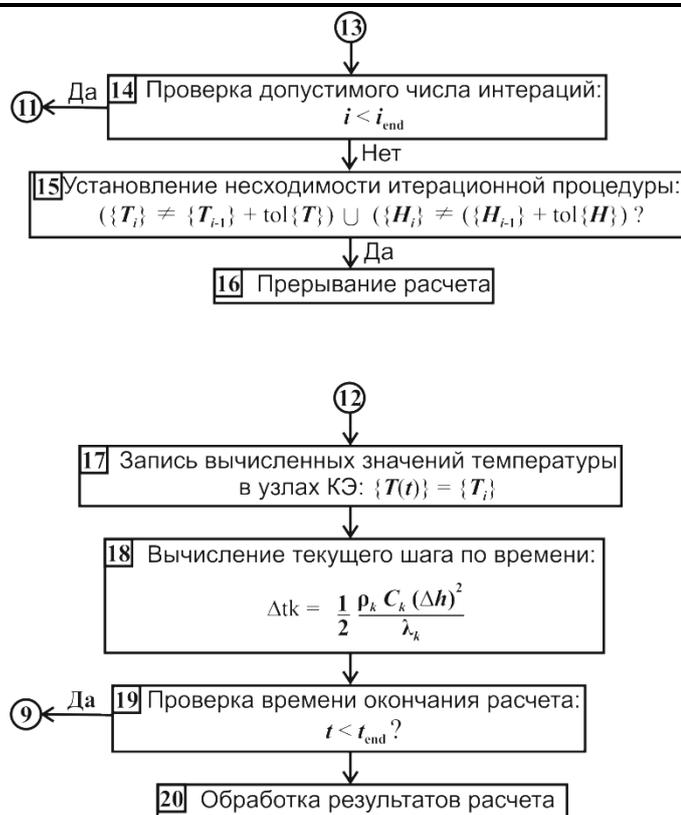


Рис. 3 Блок-схема алгоритма: t_{end} – конечное значение интервала времени в расчете; i_{end} – число итераций на каждом шаге по времени; h_m – толщина слоя грунта основания; $\min\Delta t$, $\text{avg}\Delta t$, $\max\Delta t$ – минимальное, среднее, максимальное значение шага по времени; $(T_b, -1\text{ }^\circ\text{C}, 0\text{ }^\circ\text{C}, T_{\text{end}})$ – таблица температур изменения теплофизических параметров грунта; T_b , T_{end} – начальная и конечная температура; $\text{tol}(T)$, $\text{tol}(H)$ – критерии сходимости итерационной процедуры по температуре и энтальпии

Представленный алгоритм расчета промерзания слоистых оснований зимних лесовозных дорог успешно использовался автором в работе [2]. Алгоритм позволяет на персональных компьютерах среднего класса производить теплотехнические расчеты слоистых оснований зимних лесовозных дорог по текущим значениям температуры воздуха и скорости ветра с учетом фазовых превращений воды в лед.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981. 416 с.
2. Миляев А.С. Влияние тепловыделения биомассы подстилающего слоя на промерзание оснований зимних лесовозных дорог//Лесн. журн. 2010. № 1. С. 53–58. (Иzv. высш. учеб. заведений).

3. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
4. СНиП 2.06.04–82. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов)/Госстрой России. М.: ГУП ЦПП, 1982. 37 с.
5. СНиП 2.02.04–88. Основания и фундаменты на вечномерзлых грунтах /Госстрой России. М.: ГУП ЦПП, 2000. 52 с.

Поступила 17.10.11

A.S. Milyayev

St. Petersburg State Forestry Engineering University

Algorithm of Calculation of the Frost Penetration of the Winter Logging Roads Stratified Bases

The article presents an algorithm of calculation of frost penetration depth and rate of the winter logging roads based on current air temperature and wind speed in the given area. The algorithm is based on a computational solution of a nonlinear transient problem regarding the heat transfer in an “air-ground” thermodynamic system. Phase transformations “pore water – ice” as well as dependence of ground thermalphysic characteristics on temperature to be taken into consideration.

Key words: winter logging roads, heat transfer, base frost penetration, “water-ice” phase transformations, nonlinear non-stationary equation of heat conductivity.