

УДК 676.1.038.2

М.А. Агеев, А.И. Короткий

Короткий Александр Илларионович родился в 1954 г., окончил в 1976 г. Уральский государственный университет, доктор физико-математических наук, профессор, руководитель отдела прикладных задач Института математики и механики Уральского отделения РАН. Имеет 125 печатных работ в области математической физики, теории управления, дифференциальных игр, динамики вязкой жидкости.



ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЬКА ВОЗДУХА В ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ ПРИ ФЛОТАЦИИ

В сферической системе координат решена задача обтекания шара при оссиметричном его движении, обратимая по отношению к движению пузырька. Получены уравнения движения пузырька воздуха в волокнистой суспензии, а также уравнение распределения давления, создаваемого в волокнистой суспензии при движении пузырька.

Ключевые слова: сферическая система координат, пузырек воздуха, волокнистая суспензия.

Ранее [1] было получено реологическое уравнение волокнистой суспензии, учитывающее ее тиксотропные свойства и энергию активации вязкого течения $\tau = Ae^{-ae^{-bt}} + \mu\dot{\gamma}$.

Здесь τ – касательное напряжение;

A – прочность сети волокон в момент приложения сдвигающих нагрузок;

a – постоянная, пропорциональная разности энергий активации течения с неразрушенной и предельно разрушенной структурой;

b – скорость тиксотропного восстановления структуры волокнистой суспензии;

μ – динамический коэффициент вязкости;

$\dot{\gamma}$ – градиент скорости.

Подобные реологические свойства среды, существенно влияющие на движение пузырька воздуха, в волокнистой суспензии при флотации, в научной литературе не рассматривались. Поэтому представляют большой научный и практический интерес.

Рассмотрим особенности движения воздушного пузырька при флотации. Для этого используем сферическую систему координат. Она удобна при изучении процессов, связанных с движением сферических частиц (пузырьки, твердые шарики, жидкие капли) в поле скоростей.

Для аналитического описания движения пузырька воздуха в волокнистой суспензии применим уравнение динамики жидкости в векторной форме [2]:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \text{div}(\tau_{i,j}), \quad (1)$$

где $\tau = (\tau_{i,j})$ – тензор вязких напряжений, компоненты которого $\tau_{i,j}$ для волокнистой суспензии связаны с компонентами $\dot{\gamma}_{i,j}$ тензора $\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_{i,j})$ скоростей деформаций следующими соотношениями:

$$\tau_{i,j} = f(\dot{\gamma}_{i,j}) + \mu \dot{\gamma}_{i,j}; \quad f(\dot{\gamma}_{i,j}) = A e^{-a e^{-b \dot{\gamma}_{i,j}}}. \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (1) к сферическим координатам r, φ, Θ (где r – расстояние от геометрической точки до начала координат; φ – широта точки; Θ – долгота точки). Таким образом,

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta} - \frac{\omega^2}{r} \right) = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{2\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi} - \tau_{\Theta\Theta} + \tau_{r\Theta} \text{ctg} \Theta}{r}; \quad (3)$$

$$\rho F_\varphi + \frac{3\tau_{\varphi r} + 2\tau_{\varphi\Theta} \text{ctg} \Theta}{r} = 0; \quad (4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \Theta} + \frac{u\omega}{r} \right) = \rho F_\Theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Theta} + \frac{\partial \tau_{\Theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\Theta\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{3\tau_{\Theta r} + (\tau_{\Theta\Theta} - \tau_{\varphi\varphi}) \text{ctg} \Theta}{r}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial(ur^2 \sin \Theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\omega r \sin \Theta)}{\partial \Theta} = 0. \quad (6)$$

При этом было учтено, что в процессе обтекания жидкостью твердого шара с учетом его симметрии можно считать, что ее поток будет осесимметричным относительно оси OZ , т. е. $u = u(t, r, \Theta)$; $v = 0$; $\omega = \omega(t, r, \Theta)$; $p = p(t, r, \Theta)$. Для установившегося процесса обтекания твердого шара $u = u(r, \Theta)$; $v = 0$; $\omega = \omega(r, \Theta)$; $p = p(r, \Theta)$.

Уравнение (4) с физической точки зрения означает баланс соответствующих касательных напряжений и в дальнейшем из рассмотрения исключено.

Рассмотрим уравнения движения (3), (5) и условие несжимаемости (6).

Для упрощения введем функцию тока $\psi = \psi(r, \Theta)$:

$$u = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}; \quad \omega = -\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (7)$$

При этом условие несжимаемости (6) выполняется автоматически. Подставив выражения для u и ω из (7) в (3) и (5), получим два уравнения с двумя искомыми функциями ψ и p . Из этих двух уравнений давление p можно исключить следующим образом: уравнение (3) дифференцируем по

Θ и из полученного вычитаем производную уравнения (5) по r , предварительно умноженного на r . В результате имеем уравнение относительно ψ более высокого порядка, чем (3) или (5). На этом пути исходная задача сводится к решению одного уравнения относительно одной функции $\psi = \psi(r, \Theta)$ двух переменных r и Θ .

Рассмотрим задачу об обтекании шара радиуса δ в следующем приближении:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \quad (\text{ускорение мало или его нет}); \quad (8)$$

$$\vec{F} = 0 \quad (\text{внешние массовые силы очень малы}). \quad (9)$$

Тогда уравнения движения (3), (5), (6) примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{1}{r} [2\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi} - \tau_{\Theta\Theta} + \tau_{r\Theta} \text{ctg}\Theta]; \quad (10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{\partial \tau_{\Theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\Theta\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{1}{r} [3\tau_{\Theta r} + (\tau_{\Theta\Theta} - \tau_{\varphi\varphi}) \text{ctg}\Theta]; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \Theta} + \frac{\text{ctg}\Theta}{r} \omega = 0. \quad (12)$$

Так как тензор напряжений представляет собой экспоненциальную функцию (2), воспользуемся разложением этой функции в ряд. Ввиду малости показателей степени ограничимся двумя первыми членами ряда:

$$\begin{aligned} e^{-ae^{-b\dot{\gamma}}} &\approx e^{-a(1-b\dot{\gamma})} \approx 1 - a(1-b\dot{\gamma}) \approx 1 - a + b\dot{\gamma}; \\ \tau_{i,j} &= f(\dot{\gamma}_{i,j}) + \mu \dot{\gamma}_{i,j} \approx A(1 - a + b\dot{\gamma}) + \mu \dot{\gamma} = \\ &= A(1 - a) + Ab\dot{\gamma}_{i,j} + \mu \dot{\gamma}_{i,j} = \tau_0 + (\mu - \mu_1) \dot{\gamma}_{i,j}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tau_0 = A(1 - a)$;

$$Ab = \mu_1.$$

Тогда

$$\tau_{i,j} = \tau_0 + (\mu - \mu_1) \dot{\gamma}_{i,j} = \tau_0 + v \dot{\gamma}_{i,j}. \quad (14)$$

Здесь v – вязкость суспензии.

Примем допущение

$$\tau_{r\Theta} = v \dot{\gamma}_{r\Theta}, \quad (15)$$

приемлемое для волокнистых суспензий низких концентраций, в которых структурные изменения, обусловленные тиксотропным восстановлением и энергией активации вязкого течения, минимальны. В дальнейших преобразованиях это приведет к исчезновению слагаемых с множителем τ_0 при подстановке (14) в (10) и (11).

Предположив (8), (9), (13), (15), получаем следующую систему из трех уравнений для нахождения трех функций u , ω , p :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \Theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} - \frac{2}{r^2} u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \Theta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \Theta}{r^2} \omega \right); \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Theta} = v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \Theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \Theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \omega \right); \quad (17)$$

и уравнение (12).

Для искомых функций рассмотрим следующие граничные условия:

1) на поверхности пузырька выполняется условие прилипания, т.е. скорость жидкости на его поверхности равна нулю:

$$u|_{r=\delta} = 0; \quad \omega|_{r=\delta} = 0; \quad (18)$$

2) в бесконечности скорость жидкости совпадает со скоростью однородного тока жидкости, направленного вдоль оси OZ и имеющего скорость U :

$$u|_{r=\infty} = U \cos \Theta; \quad \omega|_{r=\infty} = -U \sin \Theta. \quad (19)$$

Решим краевую задачу (16), (17), (12), (18), (19), исходя из вида граничных условий:

$$u = R(r) \cos \Theta; \quad \omega = -\Theta(r) \sin \Theta; \quad p = vP(r) \cos \Theta, \quad (20)$$

где R , Θ , P – новые искомые функции, зависящие от r .

Из (18) и (19) вытекает, что функции R и Θ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$R|_{r=\delta} = 0; \quad \Theta|_{r=\delta} = 0; \quad (21)$$

$$R|_{r=\infty} = U; \quad \Theta|_{r=\infty} = U. \quad (22)$$

Подставив (20) в (16), (17) и (12), получим

$$P' = R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{4}{r^2} (R - \Theta); \quad (23)$$

$$\frac{1}{r} P = \Theta'' + \frac{2}{r} \Theta' + \frac{2}{r^2} (R - \Theta); \quad (24)$$

$$\Theta = \frac{r}{2} R' + R. \quad (25)$$

Подставим (25) в (24):

$$P = \frac{r^2}{2} R''' + 3rR'' + 2R', \quad (26)$$

а (25) и (26) в (23):

$$r^3 R'''' + 8r^2 R''' + 8rR'' - 8R' = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) найдем в виде $R = r^m$. Подставив это выражение в (27), получим для m уравнение $m(m+1)(m+3)(m-2) = 0$, которое имеет четыре корня: $m_1 = -3$; $m_2 = -1$; $m_3 = 2$; $m_4 = 0$.

Общее решение уравнения (27) примет следующий вид:

$$R = C_1 r^{-3} + C_2 r^{-1} + C_3 r^2 + C_4, \quad (28)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Подставив (28) в (25) и (26), получим

$$\Theta = -\frac{C_1}{2} r^{-3} + \frac{C_2}{2} r^{-1} + 2C_3 r^2 + C_4;$$

$$P = C_2 r^{-2} + 10 C_3 r.$$

Из граничных условий (21) и (22) имеем

$$C_1 = \frac{1}{2} \delta^3 U; \quad C_2 = -\frac{3}{2} \delta U; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = U.$$

Значит,

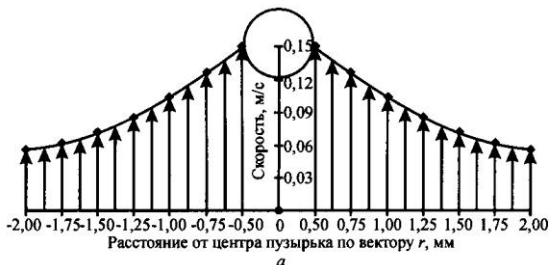
$$R = U \left(\frac{\delta^3}{2r^3} - \frac{3\delta}{2r} + 1 \right); \quad \Theta = U \left(-\frac{\delta^3}{4r^3} - \frac{3\delta}{4r} + 1 \right); \quad P = -\frac{3\delta}{2r^2} U.$$

Отсюда

$$u = U \left(1 - \frac{3\delta}{2r} + \frac{\delta^3}{2r^3} \right) \cos \Theta; \quad r \geq \delta; \quad (29)$$

$$\omega = -U \left(1 - \frac{3\delta}{4r} - \frac{\delta^3}{4r^3} \right) \sin \Theta; \quad r \geq \delta; \quad (30)$$

$$v = 0; \quad (31)$$



Эпюра распределения скоростей (а) и давления (б) при всплывании пузырька воздуха

$$p = -U \frac{3\delta v}{2r^2} \cos \Theta; \quad r \geq \delta; \quad (32)$$

$Q = 6\pi\nu\delta U$ – равнодействующая давления.

Для обратимой задачи движения пузырька в волокнистой суспензии нужно вычесть в уравнениях распределения скоростей и давления (29)–(32) скорость волокнистой суспензии на бесконечности:

$$u = U \left(\frac{3\delta}{2r} - \frac{\delta^3}{2r^3} \right) \cos \Theta; \quad \omega = -U \left(\frac{3\delta}{4r} + \frac{\delta^3}{4r^3} \right) \sin \Theta; \quad p = U \frac{3\delta v}{2r^2} \cos \Theta.$$

Таким образом, получены решения распределения скоростей и давлений при движении пузырьков воздуха в диспергированном потоке волокнистой суспензии.

На основании полученных нами экспериментальных результатов по определению размеров пузырьков воздуха ($\delta = 500$ мкм), скорости всплывания пузырька воздуха ($U = 0,15$ м/с при вязкости $\nu = 90$ мПа·с и концентрации волокнистой суспензии 0,5 % построены эпюры скорости и давления (см. рисунок) при $\Theta = 0^\circ$ и $r \geq \delta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агеев, А.Я.* О второй составляющей реологического уравнения О.А. Терентьева для волокнистой суспензии [Текст] / А.Я. Агеев // Лесн. журн. – 1975. – № 1-2. – С. 170–177. – (Изв. высш. учеб. заведений).
2. *Терентьев, О.А.* Гидродинамика волокнистых суспензий в целлюлозно-бумажном производстве [Текст] / О.А. Терентьев. – М.: Лесн. пром-сть, 1980. – 248 с.

Поступила 03.03.06

Уральский государственный
технический университет

М.А. Ageev, A.I. Korotky

Motion of Air Bubble in Fiber Suspension under Flotation

The task of flow past sphere under its axisymmetric motion reversible in relation to bubble motion is solved in the spherical coordinate system. The equations of air bubble motion in the fiber suspension are produced, as well as the equation of pressure distribution generated in the fiber suspension under the bubble motion.

