

УДК 629.03.004.14

С.С. Сеницын

Брянская государственная инженерно-технологическая академия

Сеницын Сергей Сергеевич родился в 1947 г., окончил в 1970 г. Брянский технологический институт, доцент кафедры оборудования лесного комплекса и технического сервиса Брянской государственной инженерно-технологической академии. Имеет 87 научных работ в области изучения колесных машин.
E-mail: eco-centr@online.bryansk.ru



ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРОЦЕССА КАЧЕНИЯ ПНЕВМАТИЧЕСКОГО КОЛЕСА ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ ГРУНТУ

Приведена методика расчета энергетических затрат на качение пневматического колеса в свободном режиме.

Ключевые слова: пневматическое колесо, качение, грунт, энергетические затраты.

Одним из наиболее сложных вопросов в теории колесных машин является взаимодействие эластичных колес с поверхностью качения. Исключительную важность для анализа и оптимизации процесса качения представляют энергетические затраты на деформацию грунта, составляющие большую часть суммарных потерь.

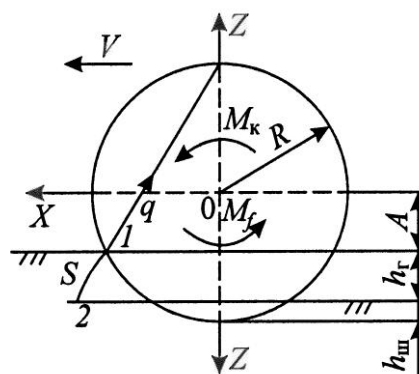
Имеющиеся в данной области наработки базируются на следующих допущениях: замена эластичного колеса жестким и использование упрощенных математических моделей шины (замена ее реальной поверхности цилиндром с различными вариациями [1], что характерно для сельскохозяйственных агрофонов).

Лесотранспортные машины работают главным образом в лесисто-болотистой местности, где имеет место сопоставимость деформаций эластичного колеса и почвогрунтов. Причем поверхность контакта весьма далека от цилиндрической и представляет собой совокупность плоской и криволинейной (в плоскости Z, Y) зон.

Основной целью данной работы является исследование оптимизации энергетических затрат на деформацию грунта в процессе качения эластичного

колеса с использованием математических моделей, наиболее точно отражающих реальную картину их взаимодействия.

Для аналитического определения вида функциональных зависимостей, отражающих затраты энергии на образование колеи, используем «свободный режим» качения колеса, который является основой для определения



Расчетная схема взаимодействия колеса с опорной поверхностью: v – вектор линейной скорости; x, z – декартовы координаты; M_k – крутящий момент, подведенный к колесу от трансмиссии; M_f – момент сопротивления качению колеса; s – траектория перемещения элементарной частицы грунта из т. 1 в т. 2; q – элементарная реакция грунта; h_r – глубина колеи; $h_{ш}$ – деформация шины; R – свободный радиус колеса;
 $A = R - h_{ш} - h_r$

параметров взаимодействия и в других режимах, в том числе и в «ведущем» [2], а также разработанную автором математическую модель шины [3], наиболее полно описывающую реальную поверхность взаимодействия эластичного колеса с лесными почвогрунтами (см. рисунок).

Заменяя действительный путь частицы грунта по циклоиде S его вертикальной составляющей h по оси Z колеса, принимаем, что реакция q грунта на элементарную площадку протектора шины будет пропорциональна глубине ее погружения в грунт. Сумма произведений этих сил на координаты X их приложения определяет момент сопротивления M_f качению колеса вследствие деформации грунта. Уравнение для M_f можно представить в следующем виде:

$$M_f = \iint_{\omega} q(x, y) x dx dy. \quad (1)$$

Поскольку $q = c(z - A)h_0^{-1}$ [3] (где $A = R - h - \Delta$, а $\delta P_f = \delta M_f / z$, получим

$$P_f = \iint_{\omega} \frac{C(z - A)^{\mu} x dx dy}{z}. \quad (2)$$

В данных выражениях (1) и (2) Y представляет собой ось координат, перпендикулярную плоскости, а h_0 – базовую деформацию почвогрунта, численно равную 0,01 м.

Разложив $(z - A)^{\mu}$ в степенной ряд и поставив вместо z его значение из характеристического уравнения поверхности шины

$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

получим

$$P_f = \frac{C}{h_0^{\mu}} \left[\iint_{\omega} R^{\mu-1} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu-1} x dx dy - \mu A \times \right. \\ \left. \times \iint_{\omega} R^{\mu-2} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu-2} x dx dy + \frac{\mu(\mu-1)}{2} A^2 \times \right. \\ \left. \times \iint_{\omega} R^{\mu-3} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu-3} x dx dy \right]. \quad (3)$$

Приняв $x = R u$, $b = b v$ и определив якобиан преобразования $I = Rb > 0$, для первого интеграла получим рекуррентное соотношение

$$\iint_{\omega} R^{\mu-1} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu-1} x dx dy = \\ = b R^{\mu-1} \iint \sqrt{1 - u^2 - v^2}^{\mu-1} u du, dv.$$

Перейдя к полярным координатам $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$, приведем интеграл к следующему виду:

$$\iint_{\omega} R^{\mu-1} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu-1} x dx dy = \\ = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^r \left(\sqrt{1 - r^2} \right)^{\mu-1} r^2 dr. \quad (4)$$

Преобразуем внутренний интеграл

$$\int_0^r \left(\sqrt{1 - r^2} \right)^{\mu-1} r^2 dr,$$

который является частным случаем интеграла от биномиального дифференциала [4]:

$$\int x^m (x^n + b)^p dx, \quad (5)$$

где $m = 2$;

$$p = \frac{\mu-1}{2}.$$

Полученный интеграл не подходит ни под один из трех случаев выражения его через элементарные функции. Тогда, применив подстановку $t = r^2$, преобразуем его к виду

$$\frac{1}{2} \int_0^r \left(\sqrt{1 - t} \right)^{\mu-1} t^{\frac{1}{2}} dt, \quad (6)$$

а это есть частный случай интегрального представления неполной бета-функции [4]

$$B(x; p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (7)$$

которая может быть выражена через гипергеометрическую функцию $F(a, b; c; x)$ следующим образом [4]:

$$\frac{x^p}{p} F(p, 1-p; 1; x) = B(x; p, 1-p). \quad (8)$$

Гипергеометрическая функция, в свою очередь, может быть выражена через гамма-функцию [4]:

$$F(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right). \quad (9)$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^{r_2^2} t^{\frac{\mu-1}{2}} dt = \frac{x^p}{2p} \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} = \frac{r_2^{2p}}{2p} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+\mu+1}{2}\right)}.$$

Взяв внешний интеграл в уравнении (4), получим

$$\iint_{\omega} R^{\mu-1} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu-1} dx dy = \frac{bR^{\mu+1} r_2^{2p}}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+\mu+1}{2}\right)}. \quad (10)$$

Так как $F(1+p) = p \Gamma(p)$, а $\Gamma(1) = 1$, то приведем правую часть уравнения (10) к следующему виду:

$$\frac{bR^{\mu+1} r_2^{2p} \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+\mu+1}{2}\right)} \Gamma(\mu) \quad (11)$$

Используя для гамма-функций асимптотическую формулу, получим

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\mu}{2}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}};$$

$$\Gamma\left(\frac{p+\mu+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2+\mu}{2}\right) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\mu}{2}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{3+\mu}{2}}.$$

Тогда

$$\iint_{\omega} R^{\mu-1} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu-1} dx dy = \frac{2bR^{\mu+1} r_2^{2p} \sqrt{2}}{\mu^{1.5}} \Gamma(\mu) \quad (12)$$

Решим последующие интегралы уравнения (3) и для жесткого колеса будем иметь

$$P_{fж} = \frac{2cbR^{\mu+1} r_2^{2p} \sqrt{2} \Gamma(\mu)}{h_0^{\mu} \mu^{1.5}} \left(1 - \frac{A}{R}\right). \quad (13)$$

Проинтегрировав уравнение (3) в диапазоне от 0 до r_1 , определим потери на деформацию грунта эластичным колесом:

$$P_{fэ} = \frac{2cbR^{\mu+1} \sqrt{2} \Gamma(\mu)}{h_0^{\mu} \mu^{1.5}} \times \left(r_1^{2p} - r_2^{2p} \right) \left(1 - \frac{A}{R}\right)^{\mu}. \quad (14)$$

С учетом того, что

$$r_2 = \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}}; \quad r_1 = \sqrt{1 - \frac{(R-h_{ш})^2}{R^2}};$$

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

имеем

$$P_{fэ} = \frac{cbR \sqrt{2\pi}}{h_0^{\mu} \mu^{1.5}} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{A^2}{R^2}} - \sqrt[3]{1 - \left(\frac{R-h_{ш}}{R}\right)^2} \right) - (R-A)^{\mu} = \frac{cbR \sqrt{2\pi}}{h_0^{\mu} \mu^{1.5}} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{(R-h_r-h_{ш})^2}{R^2}} - \sqrt[3]{1 - \frac{(R-h_{ш})^2}{R^2}} \right) (h_r + h_{ш})^{\mu}. \quad (15)$$

После разложения

$$\sqrt[3]{1 - \frac{R - h_r - h_{ш}}{R^2}} \text{ и } \sqrt[3]{1 - \frac{R - h_{ш}}{R^2}}$$

в биномиальный ряд и соответствующих преобразований окончательно получим

$$P_{f_3} = \frac{2cbh\sqrt{2\pi}}{3h_0^\mu \mu^{1.5}} (h_r + h_{ш})^\mu. \quad (16)$$

Сопротивление грунта качению колеса может быть определено, если известна работа, затрачиваемая на об-

$$A_{об} = 2 \left[\int_0^b \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}} dy \int_0^{2\pi R} dl \int_A^R \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} c \left(\frac{z - A}{h_0} \right)^\mu dz - \int_0^b \sqrt{1 - \frac{R - h_{ш}}{R^2}} dy \int_0^{2\pi R} dl \int_{R - h_{ш}}^R \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} c \left(\frac{z - A}{h_0} \right)^\mu dz \right]. \quad (17)$$

Интегрируем первый тройной интеграл по dz и dl :

$$\frac{2\pi R^{\mu+2} c \left(1 - \frac{A}{R}\right)^{\mu+1}}{h_0^\mu \Gamma(\mu+1)} \times \int_0^b \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}} \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \right)^{\mu+1} dy. \quad (18)$$

После замены переменных $y = ub$, $u^2 = t$ выражение принимает следующий вид:

$$\frac{2\pi b c R^{\mu+2}}{h_0^\mu \Gamma(\mu+1)} \left(1 - \frac{A}{R}\right)^{\mu+1} \int_0^{\frac{A^2}{R^2}} \left(-t\right)^{\frac{\mu+1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (19)$$

Полученный интеграл есть частный случай интегрального представления неполной бета-функции $Bx(p, q)$ (уравнение (7)), которая аналогичным образом (8) и (9) может быть выражена через гипергеометрическую функцию $F(a, b; c; x)$ и в общем виде через гамма-функцию

$$F_{(a,b;c;x)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c)\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2}\right)}.$$

С учетом того, что $\Gamma_{(p+1)} = p \Gamma_{(p)}$, $\Gamma_{(1)} = 1$, а $\Gamma_{(0.5)} = \sqrt{\pi}$, имеем

разование колеи. В свою очередь, эта работа пропорциональна перемещению точки поверхности колеса в грунте из положения 1 (см. рисунок) в положение 2 по циклоиде S , которое может быть заменено нормальным перемещением h по оси Z колеса.

С учетом того, что $h_r = z - A$, работа, затрачиваемая на образование колеи за один оборот эластичного колеса, описывается следующей зависимостью:

$$F_{(a,b;c;x)} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(p - \frac{\mu+4}{2}\right)}.$$

Поскольку $x = 1 - \frac{A^2}{R^2}$, $p = \frac{1}{2}$,

тогда

$$Bx(p, q) = 2\sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2}\right)}.$$

Окончательно для первого тройного интеграла получаем

$$\frac{2\pi b c R^{\mu+2}}{h_0^\mu \Gamma(\mu+1)} \left(1 - \frac{A}{R}\right)^{\mu+1} \sqrt{\pi} \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2}\right)},$$

после преобразований будем иметь:

$$\frac{2\pi\sqrt{\pi} b c R^{\mu+1} h_r^{\mu+1}}{h_0^\mu \Gamma(\mu+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2}\right)} \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}}. \quad (20)$$

Проведем аналогичные выкладки для второго тройного интеграла:

$$\frac{4\pi\sqrt{\pi} b c R^{\mu+1} h_r^{\mu+1}}{h_0^\mu \Gamma(\mu+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2}\right)} \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}} - \sqrt{1 - \frac{R - h_{ш}}{R^2}}. \quad (21)$$

С учетом того, что $A = R - h_r - h_{ш}$, разлагаем выражение в скобках в биномиальный ряд и, ограничившись линейным приближением этого ряда, окончательно получаем

$$A_{об} = \frac{4\pi\sqrt{\pi}bch_r^{\mu+2}}{h_0^\mu(\mu+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2}\right)}. \quad (22)$$

Таким образом, получена аналитическая зависимость для определения работы, затрачиваемой на деформацию грунта колесом в свободном режиме качения. Эта зависимость доведена до инженерного уровня и содержит параметры грунта и шины, а также легко определяемые по таблицам значения гамма-функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ксенович И.П., Гоберман В.А., Гоберман Л.А. Наземные тягово-транспортные системы: Энциклопедия. Т. 1-2. М.: Машиностроение, 2003. 743 с.

2. Левин М.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 270 с.

3. Синицын С.С. Математическая модель колеса с эластичной шиной // Эксплуатация лесовозного подвижного состава: Межвуз. сб. науч. тр. Изд-во УПИ, 1985. С. 34–41.

4. Янке Э.Я. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

S.S. Sinitsyn
Bryansk State Academy of Engineering and Technology

Energy Assessment of Pneumatic Wheel Rolling Process along Deformed Soil

The technique is provided for calculating energy costs on pneumatic wheel rolling in the free mode.

Keywords: pneumatic wheel, rolling, soil, energy costs.