



МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДРЕВЕСИНЫ И ДРЕВЕСИНОВЕДЕНИЕ

УДК 539.3+624.04

А.С. Миляев

Миляев Александр Сергеевич родился в 1936 г., окончил в 1959 г. Ленинградское высшее военное инженерно-техническое училище ВМФ, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики С.-Петербургской государственной лесотехнической академии. Имеет более 60 научных работ в области механики деформируемого твердого тела, в том числе механики силового взаимодействия конструкций и сооружений с грунтом при статических и динамических нагрузках.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ ПРИ РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИИ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Из решения контактной задачи о взаимодействии при поступательном перемещении абсолютно твердого кругового цилиндра с упругой средой выведена формула для определения коэффициентов постели основания в упругой стадии деформирования грунтов, которая в явном виде учитывает их деформационные характеристики – модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Ключевые слова: упругая среда, конструкции кругового сечения, коэффициент постели, деформирование, грунт.

Надежность инженерных конструкций, взаимодействующих с грунтом и рассчитываемых на модели «балка на упругом основании» (свайные опоры мостов, причальные сооружения на высоких свайных ростверках, трубы в насыпях для отвода воды, обделка автодорожных тоннелей и т.п.), существенно зависит от точности определения коэффициента постели. В практических расчетах подобного рода этот коэффициент выбирают по аналогии из широкого диапазона табличных величин [4] или определяют из опытов.

Например, в приложении 1 к СНИИПам [4] коэффициент постели K_{bed} определяют по формуле

$$K_{bed} = K_{pr} z / g_c, \quad (1)$$

где K_{pr} – коэффициент пропорциональности, кН/м^4 , принимают в зависимости от вида грунта, окружающего сваю, по табл. 1 приложения 1 [4];

z – глубина расположения сечения сваи в грунте, м;

g_c – коэффициент условий работы, принимают равным 1 или 3.

Коэффициенты K_{gr} (в табл. 1 приложения 1 [4]) получены эмпирически [1] и лежат в диапазонах $[(4 \dots 7), \dots, (50 \dots 100)] \cdot 10^3$ кН/м⁴. Эти коэффициенты не зависят от модуля деформации E и коэффициента Пуассона ν , что создает трудности при выборе K_{gr} для грунтов, не указанных в работе [4], хотя деформационные свойства оснований сооружений принято характеризовать при помощи E и ν .

В данной статье выведена формула для определения коэффициентов постели основания в упругой стадии деформирования грунтов, которая в явном виде учитывает их деформационные характеристики.

Для моделирования реакции грунта используем линейно-деформируемую среду (упругое тело), характеризуемую модулем деформации и коэффициентом Пуассона. Конструкцию считаем абсолютно твердым круговым цилиндром (рис. 1). Принимаем, что цилиндр при смещении $U_x^{(0)}$ вниз, в направлении оси Ox , контактирует с упругим телом не по всему контуру L , а только в его нижней половине, поскольку в точках верхней половины контура должны возникать растягивающие напряжения, вызывающие разрыв контактных связей цилиндра с грунтом.

Полагаем, что круговой цилиндр имеет гладкую боковую поверхность и медленно перемещается перпендикулярно своей оси на величину $U_x^{(0)}$, вызывая реакцию силы сопротивления \tilde{R}_x со стороны упругой среды.

Определим напряженно-деформированное состояние (НДС) упругого тела, т. е. найдем зависимость нормальных σ_r , σ_θ и касательных $\tau_{r\theta}$ напряжений от координат точек тела (r, θ) и главный вектор \tilde{R}_x сил

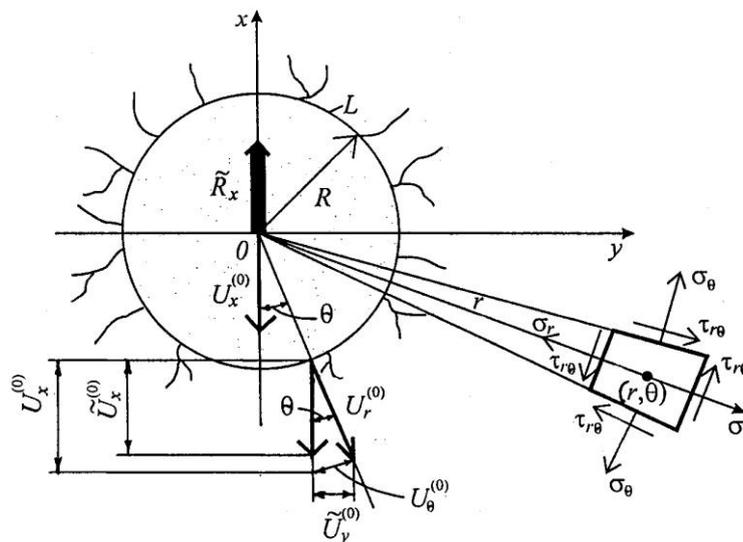


Рис. 1. Расчетная схема с элементарным участком сектора

сопротивления, обусловленных поступательным перемещением цилиндра $U_x^{(0)}$:

$$\tilde{R}_x = -b \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) R d\theta, \quad (2)$$

где b – длина участка образующей цилиндра.

Поскольку боковая поверхность цилиндра – гладкая, то в каждой точке (R, θ) на контактной поверхности цилиндра с упругой средой (на нижней половине) отличной от нуля будет только радиальная составляющая перемещений $U_r^{(0)}$ (тангенциальная составляющая $U_\theta^{(0)}$ равна нулю). На верхней половине контура должны быть равны нулю нормальные σ_r и касательные $\tau_{r\theta}$ напряжения: $\sigma_r(R, \theta) = \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0$.

Таким образом, в каждой контактной точке (R, θ) упругого тела на нижней половине контура имеют место смещения $\tilde{U}_x^{(0)}$ и $\tilde{U}_y^{(0)}$.

Следовательно

$$U_r^{(0)} = U_x^{(0)} \cos \theta; \quad \tilde{U}_x^{(0)} = U_r^{(0)} \cos \theta; \quad \tilde{U}_x^{(0)} = U_x^{(0)} \cos^2 \theta; \quad \tilde{U}_y^{(0)} = U_\theta^{(0)} \cos^2 \theta = 0.$$

Примем, что в точках верхней половины контура вертикальные перемещения равны нулю. Тогда граничные условия в перемещениях будут иметь следующий вид:

$$\tilde{U}_x^{(0)} = \begin{cases} \frac{1}{2} U_x^{(0)} \left[1 + \frac{1}{2} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \right], & -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3}{2}\pi. \end{cases} \quad (3)$$

В результате фиксации в точках верхней половины контура возникают напряжения, главный вектор которых будет действовать в направлении, противоположном главному вектору напряжений в точках нижней половины контура. Результирующий главный вектор напряжений можно будет определить как разность:

$$\tilde{R}_x = -\tilde{R}_{x,\text{down}} + \tilde{R}_{x,\text{up}} = -b \int_{0,5\pi}^{-0,5\pi} (\sigma_r \cos \theta) R d\theta + b \int_{1,5\pi}^{0,5\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) R d\theta. \quad (4)$$

В выражении (4) учтено, что на нижней половине контура L касательные напряжения равны нулю, а направление обхода контура положительно.

Полагаем, что НДС упругой среды вдали от полости не изменяется в результате перемещения цилиндра, а также не возникает жесткого перемещения или поворота упругого тела в целом.

Напряженное состояние упругой среды определяется комплексными потенциалами $\varphi(z)$, $\psi(z)$ [3], через которые выражают напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ в каждой точке упругой среды вне круговой полости радиусом R .

Для определения комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ применим метод, разработанный Н. И. Мусхелишвили [3].

На плоскости xOy введем комплексную переменную $z = x + iy = re^{i\theta}$ и область $|z| > R$ на плоскости z отображим на область $|\zeta| > 1$ на вспомогательной плоскости ζ :

$$z = \omega(\zeta) = R\zeta, \quad (5)$$

где R – радиус полости, положительное действительное число;

ζ – комплексная переменная, $\zeta = re^{i\alpha}$.

Отображение (5) является конформным преобразованием подобия

$$|z| > R \quad |\zeta| > 1; \quad \arg z = \arg \zeta; \quad \alpha = \theta. \quad (6)$$

В области $|z| > R$ функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ считаем голоморфными.

Граничное условие поставленной задачи на плоскости ζ запишем в виде [3]

$$\kappa\varphi(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi'(t) - \psi(t)} = 2G\tilde{U}_x^{(0)}(t), \quad (7)$$

где G – модуль сдвига, $G = E/(2(1 + \nu))$;

κ – параметр, $\kappa = 3 - 4\nu$;

t – дуговая переменная на окружности γ единичного радиуса ($|\zeta| = 1$),
 $t = e^{i\theta}$.

С учетом соотношений $\omega(\zeta) = R\zeta$, $\omega'(\zeta) = R$, $\overline{\omega'(\zeta)} = R$ граничное условие задачи (7) преобразуем следующим образом:

$$\kappa\varphi(t) - \overline{t\varphi'(t) - \psi(t)} = GU_x^{(0)}(1 + 0,5(t^2 + t^{-2})). \quad (8)$$

Умножив каждый член уравнения (8) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t - \zeta}$ и проинтегрировав по дуге γ окружности $|\zeta| = 1$, получим выражение для $\varphi(\zeta)$ в форме интегралов типа Коши:

$$-\kappa\varphi(\zeta) = \frac{GU_x^{(0)}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1 + 0,5(t^2 + t^{-2}))dt}{t - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{t\varphi'(t)dt}}{t - \zeta}. \quad (9)$$

По теореме Коши и ее следствию 2-й интеграл в правой части (9) равен нулю и потенциал $\varphi(\zeta)$ определяется только смещением точек контура:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{GU_x^{(0)}}{\kappa} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1 + 0,5(t^2 + t^{-2}))(t)dt}{t - \zeta}. \quad (10)$$

Поскольку функция ζ – голоморфная в области $|\zeta| < 1$, интеграл от второго слагаемого справа в (10) при $|\zeta| > 1$ равен нулю. Интеграл от первого слагаемого справа в (10) определим непосредственно:

$$\int_{\gamma} \frac{dt}{t - \zeta} = \ln(t - \zeta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{\zeta + \pi/2}{\zeta - \pi/2}, \quad (11)$$

где γ – пределы от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Функцию $\varphi(\zeta)$ выразим в виде

$$\varphi(\zeta) = \frac{GU_x^{(0)}}{\kappa} \left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\pi i} \ln \frac{\zeta + \pi/2}{\zeta - \pi/2} \right). \quad (12)$$

Для определения $\psi(\zeta)$ вместо граничного условия (8) используем его сопряженное выражение:

$$\kappa \overline{\varphi(t)} - \frac{1}{t} \varphi'(t) - \psi(t) = GU_x^{(0)} (1 + 0,5(t^{-2} + t^2)). \quad (13)$$

Умножим все члены (13) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t - \zeta}$ и проинтегрируем по дуге γ окружности $|\zeta| = 1$. Так как функция $\overline{\varphi(\bar{\zeta})}$ – голоморфная в области $|\zeta| < 1$, то интеграл от первого слагаемого в (13) равен нулю. Для определения функции $\psi(\zeta)$ воспользуемся выражением

$$\psi(\zeta) = \frac{GU_x^{(0)}}{2\kappa} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma} \left(\frac{2}{t^4} + \frac{i}{t(t^2 - \pi^2/4)} \right) \frac{dt}{(t - \zeta)} - \kappa \int_{\gamma} \frac{(1 + 0,5(t^2 + t^{-2})) dt}{t - \zeta} \right] + \psi(\infty). \quad (14)$$

В формуле (14) первый справа интеграл равен

$$\frac{GU_x^{(0)}}{2\kappa} \left[\frac{2}{\zeta^4} + \frac{i}{(\zeta^2 - \pi^2/4)\zeta} \right], \quad (15)$$

второй справа –

$$\frac{GU_x^{(0)}}{2\kappa} \left(\frac{i\kappa}{\pi} \ln \frac{\zeta + \pi/2}{\zeta - \pi/2} - \frac{\kappa}{\zeta^2} \right). \quad (16)$$

Умножив каждый член граничного условия (13) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t}$ и проинтегрировав по дуге γ , в нашем случае (отсутствие перемещений на бесконечно удаленной границе) для $\psi(\infty)$ получим

$$\psi(\infty) = -GU_x^{(0)}. \quad (17)$$

Просуммировав (15)–(17), найдем

$$\psi(\zeta) = -\frac{GU_x^{(0)}}{2\kappa} \left[\frac{2}{\zeta^4} - \frac{\kappa}{\zeta^2} + i \left(\frac{1}{\zeta(\zeta^2 - \pi^2/4)} + \frac{\kappa}{\pi} \ln \frac{\zeta + \pi/2}{\zeta - \pi/2} \right) \right] - GU_x^{(0)}. \quad (18)$$

Располагая потенциалами $\varphi(\zeta)$ (12) и $\psi(\zeta)$ (18), напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ в любой точке (r, θ) упругого тела вне круговой полости можно определить следующим образом. Введем вспомогательную функцию

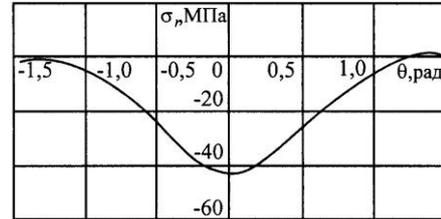
$$\Omega = [e^{i\theta} \varphi''(\zeta) + e^{2i\theta} \psi'(\zeta)]/R. \quad (19)$$

Напряжения выразим через Ω :

$$\sigma_r = \text{Re}[2\varphi'(\zeta)/R - \Omega(\zeta)]; \quad \sigma_\theta = \text{Re}[2\varphi'(\zeta)/R + \Omega(\zeta)]; \quad \tau_{r\theta} = \text{Im}[\Omega(\zeta)]. \quad (20)$$

Распределение напряжений σ_r по нижней части контура полости радиусом $R = 3,5$ м при смещении жесткого цилиндра на величину $U_x^{(0)} = 1$ м и значениях модуля упругости $E = 10$ МПа и коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$ представлено на рис. 2.

Рис. 2. Распределение напряжений σ_r по нижней половине контура L



В формулах (12), (18)–(20) заменим переменную $\zeta = z/R$ и положим на контуре $z = Re^{i\theta}$. Подставив выражения напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ (20) на контуре L в формулу для главного вектора \tilde{R}_x (4), получим

$$\tilde{R}_{x,\text{down}} = b \frac{GD}{4\kappa} U_x^{(0)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\sigma_r \cos \theta) d\theta, \tag{21}$$

$$\tilde{R}_{x,\text{up}} = -b \frac{GD}{4\kappa} U_x^{(0)} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) d\theta. \tag{22}$$

Числовые значения интегралов в правой части (21) и (22) соответственно равны 1,794 и 0,0013. Следовательно, теоретическое выражение для коэффициента постели

$$K_{\text{th}} = \frac{\tilde{R}_x}{bDU_x^{(0)}} = 1,793 \frac{G}{4\kappa} \cong 0,224 \frac{E}{(1+\nu)(3-4\nu)}. \tag{23}$$

Верификация формулы (23) для коэффициентов постели была выполнена двумя способами для 17 типов грунтов Выборгского района г. С.-Петербурга с известными модулями деформации E и коэффициентами Пуассона ν : сравнением с коэффициентами пропорциональности K_{pr} из табл. 1 приложения 1 [4] и численным решением контактной задачи о взаимодействии жесткого кругового цилиндра с упругой средой при его поступательном перемещении.

Из табл. 1 приложения 1 [4] видно, что K_{bed}/z – постоянная для данного типа грунтов величина; обозначим ее буквой C_0 . Тогда числовые значения коэффициентов пропорциональности K_{pr} во всех случаях, кроме многорядного расположения свай в фундаменте с низким ростверком, опирающимся на грунт, можно определить по формуле

$$K_{\text{pr}} = g_c C_0 = 3C_0. \tag{24}$$

Полагая в (24) $C_0 = K_{\text{th}}$, для коэффициента пропорциональности получим $K_{\text{pr}} = 3K_{\text{th}}$. Значения теоретических коэффициентов постели $3K_{\text{th}}$ лежат в диапазоне $(2,80 \dots 31,25) \cdot 10^3 \text{ кН/м}^4$.

Сравнивая числовые значения $3K_{\text{th}}$ с числовыми значениями K_{pr} в табл. 1 приложения [4], видим, что K_{th} для грунтов, характеризуемых пара-

метрами E и ν , либо попадают в интервалы изменения $K_{pr}/3$ из табл. 1 приложения [4], либо близки к нижней границе этих интервалов.

Учитывая эмпирический («грубо ориентировочный» [1]) характер числовых значений K_{pr} из табл. 1 приложения [4], можно сделать вывод об удовлетворительном соответствии K_{th} опытными данным.

Для численного решения была построена конечно-элементная модель (КЭ-модель) кругового цилиндра большой жесткости ($E = 300$ ТПа, $\nu = 0,15$) радиусом $R = 3,55$ м в упругом цилиндрическом кольце (внутренний радиус $R = 3,55$ м, внешний радиусом $R_b = 37,00$ м), закрепленном по внешнему контуру. Значения E и ν упругого цилиндрического кольца соответствовали деформационным свойствам 17 типов грунтов Выборгского района г. С.-Петербурга до глубины 70 м (задачу решали для расчета обделки метрополитена [2]).

Модуль деформации слоя грунта толщиной 15 см, прилегающего к верхней половине контура L жесткого цилиндра, принимали равным 125 Па с тем, чтобы исключить влияние растягивающих напряжений в верхней половине контура L на главный вектор \tilde{R}_x . Для внутреннего цилиндра, нагруженного собственным весом, определяли главный вектор \tilde{R}_x и смещения $U_{x,fem}$.

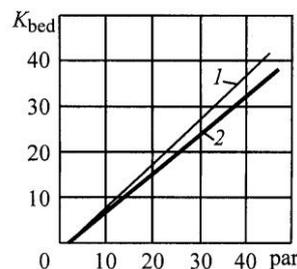
Коэффициенты постели K_{fem} для КЭ-модели рассчитывали по формуле $K_{fem} = \tilde{R}_x / (b2R U_{x,fem})$. Значения K_{fem} сравнивали с теоретическими K_{th} . Относительная ошибка не превышала 7 %.

На рис. 3 изображены графики зависимости теоретических K_{th} (2) и рассчитанных по КЭ-модели K_{fem} (1) коэффициентов постели от параметра $par = G/k$ для 17 типов грунтов Выборгского района С.-Петербурга. Как видно из рис. 3, коэффициенты постели K_{fem} линейно зависят от параметра G/k , численные значения K_{th} дают нижнюю границу K_{fem} , отличаясь от них в среднем на 7 % (в запас прочности).

Расхождение между K_{th} и K_{fem} объясняется тем, что в КЭ-модели перемещения вследствие ограниченности числа степеней свободы модели меньше, чем в решенной задаче.

Таким образом, нами выведена формула (23) для определения коэффициентов постели K_{th} оснований для смещающихся в нескальных грунтах

Рис. 3. Коэффициенты постели грунтов: 1 – рассчитанные по КЭ-модели; 2 – теоретические



круговых цилиндров, которая в явном виде учитывает деформационные характеристики грунтов – модуль деформации и коэффициент Пуассона. Эта формула, снимая неопределенности, связанные с идентификацией грунтов, позволяет повысить точность расчетов на продольно-поперечный изгиб свайных опор мостов, причальных сооружений на высоких свайных ростверках, обделок тоннелей, подземных трубопроводов и других инженерных конструкций, взаимодействующих с грунтом, находящимся в упругой стадии деформирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завриев, К.С.* Расчеты фундаментов мостовых опор глубокого заложения [Текст] / К.С. Завриев, Г.С. Шпиро. – М.: Транспорт, 1970. – 215 с.
2. *Миляев, А.С.* Надежность гидроизоляции тоннеля С.-Петербургского метрополитена на участке «Лесная» – «Площадь мужества» [Текст] / А.С. Миляев // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности и методы их решения: тр. V Междунар. конф., 14–17 окт. 2003 г. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – С. 316–330.
3. *Мусхелишвили, Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
4. СНиП 2.02.03–85. Свайные фундаменты [Текст]. – М., 1996. – 46 с.

С.-Петербургская лесотехническая
академия

Поступила 01.03.05

A.S. Milyaev

Determination of Soil Reaction Coefficient when Calculating Structure of Circular Cross-section in Elastic Medium

Based on the contact task solution regarding interaction of absolutely hard circular cylinder with elastic medium under the cylinder translational displacement the formula is derived for determining soil reaction coefficients in the elastic stage of soil deformation that takes into account its deformational characteristics – elasticity module and Poisson's ratio.

