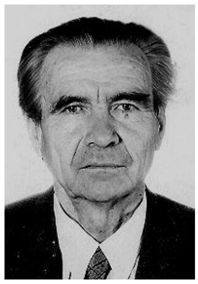
УДК 630*524.11

В.Ф. Лебков



Лебков Виктор Федорович родился в 1929 г., окончил в 1951 г. Брянский лесохозяйственный институт, доктор биологических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института лесоведения РАН. Имеет 80 печатных работ по вопросам лесоведения, лесоустройства и лесной дендрометрии.

АППРОКСИМАЦИЯ ОБРАЗУЮЩЕЙ СТВОЛА И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЕГО ФОРМЫ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Предложен способ аппроксимации образующей древесного ствола и идентификации его формы функцией распределения. Приведен пример использования функции Вейбулла для аппроксимации ствола сосны. Отмечена достаточно высокая эффективность нового метода. Показаны перспективы его практического применения.

образующая древесного ствола, форма ствола, функция распределения.

Древесный ствол является одним из важнейших объектов, изучаемых лесной дендрометрией. К настоящему времени сложились два направления его лесотаксационных исследований. Первое – оценка формы ствола как физического тела, выявление связей диаметров с высотой их измерения, т. е. определение параметров сбега ствола. Второе – разработка методов исследования образующей ствола (кривой, выражающей его продольную проекцию на плоскость) в целях определения объема ствола как тела вращения образующей. Для оценки сбега ствола используется его диаметр в местах обмера, образующей – радиус, что не меняет сути.

Оба направления отражены во многих публикациях [2, 4 и др.]. В них, как правило, признаются специфичность, автономность и самодостаточность задач, с одной стороны, теоретического обоснования формы древесного ствола, с другой – наиболее адекватной аппроксимации образующей. В то же время последней отводится роль лишь вспомогательного средства характеристики формы ствола [2].

Поскольку попытки выразить форму ствола уравнениями регрессии не увенчались должным успехом, она изучается косвенными методами: видовых чисел, коэффициентов формы, анализа чисел сбега как отношения диаметров на децилях высоты ствола к диаметру на высоте груди или на одной десятой высоты дерева, оценки формы ствола по высоте точки касания [7] и др. На этом пути установлен ряд закономерностей, широко используемых в лесохозяйственной практике.

Для аппроксимации образующей ствола более века использовали: степенную, логарифмическую функции; полиномы различных степеней, вплоть до пятнадцатой; кусочную аппроксимацию (сплайн-функцию). К обсуждению теоретических аспектов формообразования чаще всего традиционно привлекают степенную образующую, а к вычислениям – полиномиальные и другие аппроксимации [4].

Интенсивное развитие электронно-вычислительной техники в последние два-три десятилетия открыло широкие возможности для повышения оценок связей показателей формы ствола с его объемом, а также совершенствования подбора математических уравнений образующей ствола. Однако это не решило проблему построения модели, идеально аппроксимирующей образующую ствола и одновременно фиксирующей его форму.

Очевидно, нужны новые подходы к решению этой двуединой проблемы. Цель настоящей статьи – обоснование принципов ее решения.

Поисковая разработка должна начинаться с переосмысливания традиционных взглядов на характер кривой – образующей ствола. К ней можно подойти как к совокупности значений диаметров (объемов, массы) элементарных отрезков, на которые можно расчленить ствол от вершины до комля. Эту совокупность целесообразно исследовать статистическими методами, изучить ее структуру, особенности распределения диаметров (объемов, массы) отрезков, подобно тому, как это делается, например, при изучении распределения стволов по диаметру в древостое. Упорядоченное размещение элементарных отрезков ствола, возрастание диаметра от вершины к комлю не меняет существа подхода. Более того, эта упорядоченность позволяет интерпретировать образующую ствола в качестве экспериментальной (естественной, природной) кумулятивной кривой распределения, если ее нулевое значение совместить с вершиной ствола, а высоту дерева рассматривать как сумму элементарных отрезков ствола, принимая то и другое за 100 %.

Задача сводится к отысканию теоретических параметров распределения элементарных отрезков ствола по диаметру. Число таких равновеликих отрезков может быть произвольным, но обеспечивать группировку отрезков в классы (ступени) толщины для расчета статистик распределения.

Возникает вопрос, какой функцией распределения целесообразно пользоваться для аппроксимации образующей ствола. Анализ достоинств и недостатков теоретических уравнений непрерывных распределений приведен в работах [1, 3, 5, 6 и др.]. Желательно подобрать уравнение, наилучшим образом отвечающее требованиям: точности аппроксимации кривой распределения, минимизации числа параметров уравнений, гибкости и универсальности аппроксимации экспериментальных рядов распределений любой формы, возможности расчетов коэффициентов уравнений без предварительной группировки единиц наблюдения в классы. По совокупности этих признаков наиболее приемлемы уравнения распределения и плотности распределения Вейбулла [8, 9]:

$$g(y) = (c/b)((y - a)/b)^{c\text{-}1}\ \exp[-((y - a)/b)^{c}], \qquad (1)$$

где $g(y)$ – теоретические численности, доли единицы;
y – изучаемый признак;
c – параметр формы;
b – параметр масштаба;
a – параметр сдвига (при несовпадении начала кривой с центром координат);

$$y = abx^{c\text{-}1}\mathrm{e}^{-bx}\ , \qquad (2)$$

где y – теоретические численности, доли единицы;
x – изучаемый признак;
a, b, c – параметры сдвига, масштаба и формы.

В отсутствие параметра сдвига уравнение Вейбулла имеет всего два коэффициента: масштаба и формы. Коэффициент масштаба определяется, с одной стороны, диаметром комлевой части ствола, с другой – расстоянием и разностью диаметров между точками перегиба кривой в нижней и верхней частях ствола, т. е. плотностью «заселения» центральных ступеней диаметра ствола. Коэффициент формы комплексно выражает косость (асимметрию) и крутость (эксцесс) кривой плотности распределения диаметров ствола. Его по существу можно считать истинным коэффициентом формы ствола, в от-
2 личие от традиционно вкладываемого в этот термин содержания, поскольку за ним скрывается не соотношение диаметров ствола в двух точках, а характер образующей ствола на всем ее протяжении.

В качестве примера приводим результаты аппроксимации по уравнению Вейбулла для типичного модельного дерева сосны I класса роста, взятого автором на пробной площади 3-1984 (Емцовский учебно-опытный лесхоз Архангельского государственного технического университета, Архангельская область). Возраст дерева 164 года, диаметр на высоте груди (в коре) 38,4 см, высота 26,0 м, коэффициенты формы: $q_1 = 0{,}81$, $q_2 = 0{,}68$, $q_3 = 0{,}46$, видовое число $f = 0{,}464$. Расчеты на персональном компьютере выполнены Н.Ф. Каплиной.

Натурные обмеры ствола произведены на высотах 0,15 (пень); 0,5; 2; 4; 6 ... 24; 25 м (основание вершинки), а также 1,3 (высота груди), 6,5; 13,0 и 19,5 м (четверти высоты ствола), что обычно делается при определении объема ствола по секциям по сложной формуле Губера, в данном случае по двухметровым секциям, кроме первой однометровой.

В качестве рабочего принято уравнение вида

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-(x/b)} \qquad (3)$$

с обозначениями, указанными для формул (1) и (2).

Анализ определения диаметров ствола в различных точках образующей, а также объемов секций и ствола в целом показал наличие весьма существенных погрешностей по секциям в начале и конце кривой, особенно в вершинной части ствола. В связи с этим для повышения точности аппроксимации Н.Ф. Каплина предложила ввести в уравнение Вейбулла еще один параметр формы, обозначив первый c_1, второй c_2. Рабочее уравнение приняло вид

$$y = 1 - 2/(\mathrm{e}^{-(x/b)^{c_1}} + \mathrm{e}^{-(x/b)^{c_2}}). \qquad (4)$$

Введение дополнительного коэффициента формы существенно повысило точность аппроксимации образующей ствола и определения его объема в целом и по секциям, поэтому некоторое усложнение уравнения оправдано с точки зрения более адекватного отражения формы ствола в верхней и нижней половинах.

Результаты расчетов по обоим вариантам для опытного дерева приведены в табл. 1 и 2 и для наглядности на графике (см. рисунок).

Из табл. 1 и рисунка можно заключить, что и двух-, и трехпараметрические уравнения дают близкие результаты в центральной части образующей, но весьма различающиеся в пользу II варианта в секциях

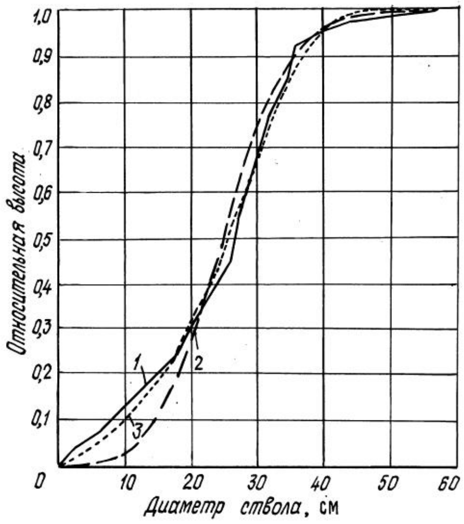
Таблица 1

Относительная высота (относительная численность единиц наблюдения) и диаметры ствола в различных точках образующей, рассчитанные по уравнению Вейбулла с двумя (I вариант) и тремя (II вариант) параметрами

Экспериментальные данные			Расчетные данные			
Высота точки измерения h		Диаметр в коре в точке измерения, см	Высота, доли единицы		Диаметр, см	
м	доли единицы $(H - h) / H$		I вариант	II вариант	I вариант	II вариант
0,5	0,981	44,1	0,992	0,998	41,6	40,6
2	0,923	35,8	0,904	0,884	36,7	37,2
4	0,846	34,2	0,865	0,831	33,6	34,6
6	0,769	31,5	0,777	0,728	31,3	32,6
8	0,692	30,2	0,726	0,676	29,4	30,6
10	0,615	28,5	0,653	0,610	27,7	28,6
12	0,538	26,6	0,565	0,539	26,0	26,6
14	0,462	25,8	0,527	0,510	24,4	24,4
16	0,385	23,0	0,394	0,414	22,8	22,1
18	0,308	19,7	0,254	0,313	21,0	19,5
20	0,231	17,2	0,166	0,246	19,1	16,6
22	0,154	11,2	0,040	0,118	16,8	13,1
24	0,077	6,3	0,006	0,047	13,6	8,6
25	0,038	2,5	0,002	0,011	11,1	5,6
Обмеры ствола в дополнительных точках						
19	0,250	17,8	0,186	0,261	19,6	17,4
13	0,500	26,3	0,551	0,528	25,2	25,5
6,5	0,750	31,2	0,766	0,716	30,8	32,1

1,3	0,950	38,4	0,950	0,950	38,4	38,4
0,15	0,994	52,6	1,000	1,000	50,9	42,8

Примечание. H – высота дерева, м. Значения параметров уравнений: I вариант – b = 28,03 см, c = 3,486; II вариант – b = 29,06 см, c_1 = 1,558, c_2= 4,563.



Образующая ствола модельного дерева сосны: *1* – экспериментальная кривая; *2* – кривая по двухпараметрическому уравнению Вейбулла; *3* – образующая по уравнению, содержащему три параметра

2*

Таблица 2

Отклонения расчетных объемов ствола в коре от фактического при аппроксимации образующей ствола по двух- и трехпараметрическим уравнениям распределений

Секция, м (начало – окончание)	Эмпирические данные		Расчетные данные		Отклонение от экспериментальных данных, %	
	$м^3$	%	I вариант	II вариант	I вариант	II вариант
0–1	0,153	10,9	0,136	0,129	–11,1	–15,3
1–3	0,201	14,4	0,212	0,218	5,2	7,8
3–5	0,184	13,1	0,177	0,188	–3,7	2,6
5–7	0,156	11,2	0,154	0,167	–1,4	6,9
7–9	0,143	10,3	0,136	0,147	–5,3	2,7
9–11	0,128	9,1	0,120	0,129	–5,8	0,9
11–13	0,111	8,0	0,106	0,111	–4,2	0,1
13–15	0,105	7,5	0,094	0,094	–10,3	–10,4
15–17	0,083	5,9	0,082	0,077	–1,9	–7,8
17–19	0,061	4,4	0,070	0,060	14,1	–1,8
19–21	0,046	3,3	0,057	0,043	23,3	–6,8
21–23	0,020	1,4	0,044	0,027	124,4	37,6
23–25	0,006	0,4	0,029	0,012	365,3	87,7
25–26	0,001	0,1	0,019	0,005	1860,7	399,1
Итого	1,398	100,0	1,436	1,407	2,7	0,6

вершинной части ствола. Как это сказывается на определении объема ствола, видно из табл. 2.

При расчете объема ствола явно недопустимые ошибки для вершинки и двух примыкающих к ней секций получены как по I, так и II вариантам уравнения. Этими ошибками можно пренебречь, поскольку суммарный объем трех начальных от центра координат секций равен всего 1,9 % объема ствола. Средние ошибки определения объема секций, за вычетом вершинных, составили: по двухпараметрическому уравнению систематическая – 0,1, случайная 10,0 %, по трехпараметрическому соответственно – 1,9 и 7,0 %. Отклонение расчетного объема всего ствола от фактического значения в I варианте равно 2,7, во II всего 0,6 %.

Точность уравнений распределений можно установить, сравнивая результаты наших исследований с данными, полученными по уравнению степенной образующей [4]

$$y = 3{,}4418x^{0{,}7814}, \tag{5}$$

где y – диаметр ствола, см, на относительной высоте x от вершины дерева.

Рассчитанный с использованием уравнения (5) объем ствола оказался равным 1,534 м^3, ошибка в абсолютном выражении 0,136 м^3, или 9,7 %.

Для более полного суждения о точности определения объема ствола с применением функции Вейбулла в опытном порядке рассчитан объем ствола 22 модельных деревьев, срубленных автором на семи пробных площадях в 1967–1970 гг. в сосняках Красноярского края. Возраст модельных деревьев 49 … 240 лет, диаметр на высоте груди 8,5 … 58,0 см, т. е. взятый для оценки материал достаточно разнороден. Ошибки определения объема дерева даже в такой неоднородной совокупности составили (%):

	I вариант	II вариант
Систематическая	+1,0	+ 0,2
Случайная	5,3	3,0
R^2	0,97	0,99

Уровень ошибок в I варианте несколько выше, чем во II, однако в обоих случаях вполне приемлем для практических расчетов.

Можно констатировать, что реализация идеи аппроксимации образующей ствола функцией распределения достаточно надежно обеспечивает высокую точность результатов при определении объема всего ствола и удовлетворительную – для отдельных его секций. Это следует учитывать при использовании теоретической модели образующей ствола для камеральной сортиментации ствола, в частности для расчета выхода сортиментов различных групп крупности применительно к действующим нормативам диаметров в верхнем отрубе и длин сортиментов. В сочетании же с натурным определением сортообразующих пороков может идти речь и о разработке сортиментно-сортных таблиц.

Оценивая преимущества трехпараметрического уравнения, содержащего два коэффициента формы, следует отметить, что изменение коэффициента c_1 более существенно отражается на характере левой вершинной ветви образующей ствола, а c_2 – правой, прикомлевой части, что легко обнаруживается при поочередном варьировании их значений. «Чувствительность» трехпараметрического уравнения на изменение формы ствола существенно выше, чем двухпараметрического. Чем больше коффициенты формы, тем меньше сбежистость ствола.

Число выборочных наблюдений для аппроксимации образующей может быть различным. В нашем примере оно равно 19 (см. табл. 1). При использовании меньшего числа точек (например 5: диаметра у пня, на 1,3 м и на трех четвертях высоты ствола) параметры составили: по первому варианту c = 3,44, b = 27,94, по второму c_1 = 1,79, c_2 = 4,50, b = 28,98. Расчетный объем ствола (по I варианту) оказался равным 1,4103 м^3, отклонение от фактического + 0,97 %, что еще раз подтверждает высокую эффективность применения уравнения распределения Вейбулла для аппроксимации образующей древесного ствола.

Представляет интерес использование функции распределения для теоретического выражения закономерностей формы древесного ствола различных древесных пород. В работе [2] приведены относительные значения диаметров стволов сосны, ели и березы на децилях высоты дерева. Рассчитанные по ним параметры уравнения Вейбулла оказались следующими:

	I вариант		II вариант		
	b	c	b	c_1	c_2
Береза	74,1	1,91	77,5	0,88	4,27
Сосна	79,2	2,90	80,9	1,56	5,07
Ель	82,5	2,81	85,3	1,28	6,35

За 100 % принят диаметр на 0,1H. Коэффициент b есть относительный диаметр на 0,368H.

Из приведенных данных видно, что в нижней половине ствола наибольшая полнодревесность, характеризуемая коэффициентом c_2, свойственна ели, далее идут сосна и береза. В верхней половине наибольшая полнодревесность наблюдается у сосны, затем у ели и березы. Это объясняет близкие позиции сосны и ели по полнодревесности всего ствола (коэффициент c двухпараметрического уравнения) и хорошо выраженные отличия березы от ели и сосны.

Выводы

1. В настоящее время нет универсальных способов аппроксимации ствола, одновременно идентифицирующих его форму.

2. Необходимо изменить подход к трактовке сущности образующей ствола и, как следствие, использовать для ее аппроксимации функции распределений изменения диаметра ствола от вершины к комлю.

3. Опытная проверка подтвердила эффективность принятой гипотезы. Правильно подобранная функция распределения, с одной стороны, обеспечивает достаточную точность аппроксимации образующей ствола, с дру-

гой – возможность придания коэффициентам формы уравнений распределений значений истинных коэффициентов формы ствола. Это позволяет более полно использовать ее для исследований формы ствола.

4. Изменение технологии аппроксимации образующей ствола будет способствовать совершенствованию теории формы древесного ствола и, при необходимости, реконструированию федеральных и региональных нормативных баз в виде совокупности общих и частных объемных, сортиментно-сортных и основывающихся на них товарных таблиц для главных древесных пород лесного фонда страны. Одной из перспективных областей оперативного моделирования формы ствола может стать управление ею через прогноз, контроль, мониторинг и воздействие на формообразующие факторы (густота древостоя и т. п.). Целесообразно также исследовать возможности аппроксимации образующей кроны дерева по ее диаметру, объему и массе с использованием функций распределений перечисленных показателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганина Н.В.* Распределение деревьев по диаметру с помощью функции Вейбулла // Лесоведение. – 1984. – № 2. – С. 65–70.
2. *Захаров В.К.* Лесная таксация. – М.: Лесн. пром-сть, 1967. – 405 с.
3. *Каплунов В.Я., Кузьмичев В.В.* Взаимосвязь рядов распределения числа стволов по толщине, сумме площадей сечений и запасу // Матер. конф. «Строение, рост и инвентаризация лесонасаждений». – Красноярск, 1965. – С. 46–52.
4. *Кофман Г.Б.* Рост и форма деревьев. – Новосибирск: Наука, 1986. – 211 с.
5. *Лебков В.Ф.* Типы строения древостоев // Лесоведение. – 1989. – № 4. – С. 12–21.
6. *Лебков В.Ф.* Динамика распределений деревьев сосны по морфометрическим показателям ствола и кроны // Лесоведение. – 1990. – № 5. – С. 57–69.
7. *Шавнин А.Г.* Определение формы древесного ствола по высоте точки касания // Лесн. хоз-во. – 1986. – № 4. – С. 53–54.
8. *Bailey R.L., Dell T.R.* Quantifyng diameter distributions with the Weibull function // Forest Sci. – 1973. – Vol. 19, N 2. – P. 97–104.
9. *Killki P., Päivinen R.* Weibull function in the estimation of the basal area dbh-distribution // Silva fenn. – 1986. – Vol. 20, N 2. – P. 149–156.

Институт лесоведения РАН

Поступила 06.06.01

V.F. Lebkov

Approximation of Stem Generatrix and its Form Identification by Cumulative Distribution Curve

The method of approximation of stem generatrix and its form identification by cumulative distribution curve is proposed. The example of using Weibull function for approximation of pine stem is given. Sufficiently high efficiency of a new method has been registered. Prospects of its practical application are shown.