УДК. 674.048

У.У. Сугаипов

Сугаипов Узум-Хаджи Усманович, родился в 1964 г., окончил в 1991 г. Ленинградскую лесотехническую академию, кандидат технических наук, доцент кафедры технологии лесозаготовительных производств С.-Петербургской государственной лесотехнической академии. Имеет 6 печатных трудов в области изучения новых способов обработки и переработки лесоматериалов, получения профилированных изделий из модифицированной древесины с заданными физико-механическими свойствами.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОЙ ПРОПИТКИ ДРЕВЕСИНЫ

Предложена математическая модель электрокинетической пропитки древесных материалов; изучены факторы, определяющие этот процесс.

Ключевые слова: пропитка древесины, математическая модель пропитки, силовое электрическое поле.

Известно, что биполярное истечение жидкости обусловлено материалом анода, вызывающего изменение знака электрокинетического потенциала. Знак потенциала может изменяться на противоположный при изменении в растворе концентрации потенциалопределяющих ионов или ионов, способных к сверхэквивалентной адсорбции. Следовательно, биполярное истечение жидкости, обусловленное наличием двух электроосмотических составляющих переноса, может наблюдаться при создании по длине диафрагмы неравномерной концентрации именно таких ионов.

Движение жидкости в древесине определяется ее сложной пространственно-временной структурой, в которой следует выделять макроскопическую (состоящую из сосудов и трахеид) и микроскопическую (в форме межмицеллярных и межфибриллярных образований) составляющие. Разница в строении древесины приводит к различному характеру движения жидкости в продольном, радиальном и тангентальном направлениях[*].

Цель статьи – разработать математическую модель для описания процесса обезвоживания–пропитки древесины в силовом электрическом поле.

Построение модели начинается с моделирования формы пор. В поперечном сечении поры по форме близки как к кругу, так и к прямоугольни-

[*] *Патякин В.И.* Техническая гидродинамика древесины / В.И. Патякин, Ю.Г. Тишин, С.М. Базаров. – М.: Лесн. пром-сть, 1990. – 304 с.

ку. Поэтому с позиций гидродинамики следует решать задачи течения жидкости как в круглых, так и плоских капиллярах.

Рассмотрим слоистое течение жидкости в плоском капилляре при наличии электрического поля. Эту задачу можно описать системой уравнений

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_з I_x}{S\chi} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_з I_y}{S\chi} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости;

u, v – скорости жидкости вдоль прямоугольных координат x, y;

t – время;

P – давление;

$\rho_з$ – плотность заряда;

I_x, I_y – сила тока в направлении координат x, y;

S – площадь сечения капилляра;

χ – удельная электропроводность жидкости;

μ – вязкость.

Рассматриваемое движение жидкости можно разделить на два характерных режима: разгонное течение, которое возникает из состояния покоя при включении электрического поля, и асимптотическое течение в форме «стула», когда осевая скорость равна скорости движения монослоя, прилегающего к стенке капилляра.

При включении электрического поля разгонное течение можно описать следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{4}$$

где ν – кинематическая вязкость.

В этой системе электрическое поле представлено как граничное условие в форме движения монослоя жидкости, прилегающего к твердой стенке и вовлекающего в движение за счет действия силы вязкости остальную жидкость.

Поставленная задача асимптотически становится эквивалентной задаче, когда плоская покоящаяся стенка внезапно приводится в движение с постоянной скоростью и необходимо выяснить в каком движение при этом участвует остальная жидкость.

Выполнив операцию *rot*, вместо уравнений (3), (4) получим уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \qquad (5)$$

где завихренность

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (6)$$

В рассматриваемых условиях справедливо неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial y} >> \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (7)$$

поэтому примем

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (8)$$

Уравнение (5) решено при следующих начальных и граничных условиях

$$\left.\begin{array}{l} t \le 0;\ \omega = 0 \text{ для всех } y; \\ t > 0;\ \omega = \omega_0; \\ \omega = \omega_0 \text{ при } y = h/2, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

где h – расстояние между стенками.

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\omega = -\omega_0 \left(1 - \frac{\int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta}{\int_0^{\eta_n} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta} \right), \qquad (10)$$

где ω_0 – начальная завихренность на стенках при включении электрического поля;

η – безразмерная координата,

$$\eta = \frac{У}{2\sqrt{\nu t}}; \qquad (11)$$

$У$ – расстояние от стенки в направлении координаты y;

$$\eta_n = \frac{h}{4\sqrt{\nu t}}. \qquad (12)$$

Из (10) следует, что разгонное течение

$$u = u_{\text{e}} - 2\sqrt{\nu t}\,\omega_0 \left(\eta - \frac{\int_0^{\eta} \int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta\, d\eta}{\int_0^{\eta_n} \exp\left(\eta^2\right) d\eta} \right), \qquad (13)$$

где u_{e} – скорость тонкого монослоя жидкости, прилегающего к стенке при включении электрического поля.

Для асимптотического течения характерно условие $u = u_{\text{e}}$, поэтому время перехода к этому режиму отражает формула

$$t_{\text{р}} = \left(\frac{h}{12}\right)^2 \nu^{-1}, \tag{14}$$

где $t_{\text{р}}$ – время разгона жидкости от момента включения электрического поля до асимптотического режима.

Для определения скорости движения в этом режиме предложено уравнение

$$\frac{\rho_{\text{з}} I_x}{S\chi} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \tag{15}$$

Из уравнения Пуассона, связывающего плотность заряда с потенциалом электрического поля φ, следует

$$\rho_{\text{з}} = \frac{D}{4\pi} \nabla^2 \varphi, \tag{16}$$

где D – диэлектрическая проницаемость жидкости.

После подстановки (16) в (15) получим

$$\frac{ID}{4\pi\chi S} \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \tag{17}$$

Тогда общее решение

$$u = \frac{ID\varphi}{4\pi\chi S\mu} + c_1 + y f_1(x) + f_2(x), \tag{18}$$

где c_1 – постоянная;

f_1, f_2 – функции.

Для условий асимптотического режима течения, когда $u = f(y)$, применима формула для расчета асимптотической скорости при электроосмотическом течении:

$$u_{\text{e}} = \frac{ID}{4\pi\chi S\mu}\left(\varphi_1 - \varphi_{01}\right) \text{ или } u_e = \frac{ID}{4\pi\chi S\mu}\xi, \tag{20}$$

где ξ – разность потенциалов в тонком мономолекулярном слое, прилегающем к стенке капилляров (пор),

$$\xi = \varphi_1 - \varphi_{01}. \tag{21}$$

Из формулы (14) следует, что для древесных капилляров размером от 10^{-8} до 10^{-4} м время наступления асимптотического режима составляет от 10^{-8} до 10^{-4} с. Поэтому для расчета времени заполнения капилляра пропиточной жидкостью можно воспользоваться формулой

$$t_{\text{ïð}} = \frac{L}{u_{\text{e}}} = L \frac{4\pi\chi S\mu}{ID\xi}, \tag{22}$$

где L – длина капилляра.

Запишем уравнения течения жидкости при электроосмосе в поровом пространстве:

$$u\frac{\partial u}{\partial X} + v\frac{\partial u}{\partial Y} + w\frac{\partial u}{\partial Z} = -u + k\frac{\partial U}{\partial \text{X}}; \tag{23}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial X}+V\frac{\partial v}{\partial Y}+w\frac{\partial v}{\partial Z}=-v+k\frac{\partial U}{\partial Y}; \qquad (24)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial X}+v\frac{\partial w}{\partial Y}+w\frac{\partial w}{\partial Z}=-w+k\frac{\partial U}{\partial Z}, \qquad (25)$$

где X, Y, Z – прямоугольные координаты;

u, v, w – скорости течения жидкости в направлении координат X, Y, Z.

Для слоистых течений уравнения (23)–(25) переводят к следующим:

$$u=k\frac{\partial U}{\partial X}; \qquad (26)$$

$$v=k\frac{\partial U}{\partial Y}; \qquad (27)$$

$$w=k\frac{\partial U}{\partial Z}. \qquad (28)$$

Здесь k – коэффициент электроосмоса, $k = (1+ k_{эу})k_э$;

$k_э$ – коэффициент однополярного электроосмоса;

$k_{эу}$ – коэффициент биполярного электроосмоса;

U – напряжение электрического поля.

При одномерном течении

$$u=k\frac{dU}{dX}=(1+k_{эу})k_э\frac{dU}{dX}. \qquad (29)$$

Учитывая, что

$$\frac{dU}{dX}=E \qquad (30)$$

(где E – напряженность электрического поля), уравнение (29) примет вид уравнения Гельмгольца – Смолуховского:

$$u=kE=(1+k_{эу})k_эE. \qquad (31)$$

Тогда в совмещенном пьезоэлектроосмотическом поле имеем уравнение движения жидкости в древесине:

$$u=k\frac{dU}{dX}-k_ф\frac{dP}{d\gamma}, \qquad (32)$$

где $k_ф$ – коэффициент фильтрации;

P – давление.

Построенная математическая модель может быть использована в качестве основы при разработке технологии процесса обезвоживания-пропитки лесоматериалов в силовом электрическом поле.

С.-Петербургская государственная
лесотехническая академия

Поступила 21.04.04

U.U. Sugaipov

Mathematical Model of Electrokinetic Wood Impregnation Process

The mathematical model of electrokinetic impregnation of wood materials is suggested and factors determining this process are studied.