



МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДРЕВЕСИНЫ И ДРЕВЕСИНОВЕДЕНИЕ

УДК 674.053

В.П. Ивановский

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДЕРЕВОРЕЖУЩЕГО ДИСКА

Установлено, что с увеличением частот вращения предпочтительно использовать дереворежущий диск с минимальным наружным диаметром.

Ключевые слова: диск, напряжения, элемент, равновесие, анализ, деформации, инерция, уравнение, прочность.

Точность деления диска по плоскости в значительной степени обусловлена его устойчивостью. При минимальных значениях толщины диска его жесткость и постоянство формы являются функцией сконцентрированных в нем внутренних напряжений. Потеря работоспособности диска может наступить и вследствие теплового износа, но чаще это происходит с уменьшением его изгибной жесткости при превышении критических частот вращения [2]. Важными причинами разрушения дисков являются также действие несбалансированных центробежных сил инерции, неравномерный нагрев корпуса и поперечные колебания системы «вал–диск» [5].

В целях уточнения диапазона изменения частоты вращения диска и анализа распределения напряжений в нем от действия центробежных сил инерции ниже приведем аналитическое определение возникающих радиальных σ_r и тангенциальных σ_t напряжений по сечению режущего диска.

Любой вращающийся диск можно рассматривать как тело постоянной толщины. Осевые напряжения [1] считаем равными нулю. Выделим на диске элемент x и составим условие его равновесия (рис. 1).

На поверхности элемента действуют отмеченные на рисунке напряжения, а на боковых гранях элемента – напряжения σ_δ . На элемент действуют две силы, соответствующие тангенциальным и радиальным напряжениям [3]:

$$F_t = \sigma_t dr; \quad (1)$$

$$F_r = (\sigma_r + d\sigma_r) r d\varphi - \sigma_r r d\varphi. \quad (2)$$

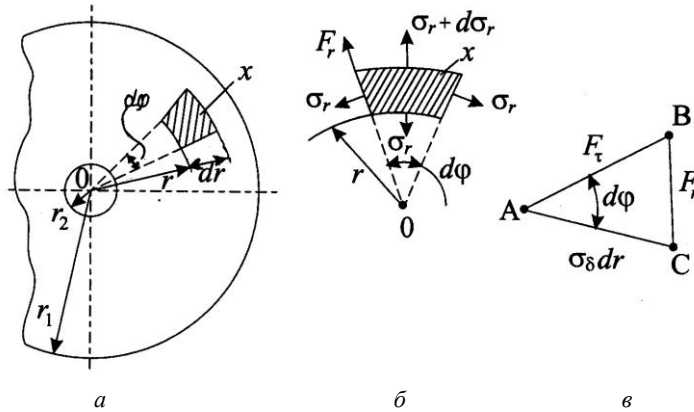


Рис. 1. Элементы диска: *a* – фрагмент диска с элементом x ($d\varphi$ – центральный угол; r_1 – радиус окружности резания диска; r_2 – радиус посадочного отверстия; r – текущий внутренний радиус элемента x ; $r + dr$ – наружный радиус); *б* – выделенный элемент x (σ_r – радиальное напряжение; F_r – радиальная сила; $\sigma_r + d\sigma_r$ – радиальные напряжения на наружной поверхности элемента); *в* – треугольник равновесия действующих сил (две тангенциальные $F_t = \sigma_\delta dr$ и одна F_r)

Итак, в равновесии участвуют три силы, составляющие замкнутый треугольник ABC: две тангенциальные и одна радиальная (рис. 1). Сила F_r связана с F_t соотношением

$$[\sigma_r + d\sigma_r] + dr - \sigma_r r = \sigma_\tau dr. \quad (3)$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, получаем

$$\sigma_r dr + d\sigma_r r = \sigma_\tau dr. \quad (4)$$

Преобразуя (4), имеем уравнение равновесия элемента:

$$\sigma_r - \sigma_\tau + \frac{d\sigma_r}{dr} r = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) невозможно определить два неизвестных напряжения, т.е. задача является статически неопределимой. Поэтому далее необходимо анализировать деформации выбранного элемента (деформация – радиальное перемещение всех точек поперечного сечения элемента). Для внутренней поверхности элемента деформация равна ε . Точки наружной поверхности перемещаются по радиусу на величину $\varepsilon + d\varepsilon$, т.е. толщина выделенного элемента увеличивается на $d\varepsilon$. Тогда относительное удлинение материала диска в радиальном направлении составит

$$l_r = \frac{d\varepsilon}{dr}. \quad (6)$$

В тангенциальном направлении относительное удлинение элемента пропорционально увеличению радиуса:

$$l_{\tau} = \frac{\varepsilon}{r}. \quad (7)$$

Согласно закону Гука имеем

$$l_r = \frac{1}{E} [\sigma_{\tau} - \mu \sigma_r] = \frac{d\varepsilon}{dr}; \quad (8)$$

$$l_{\tau} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu \sigma_{\tau}] = \frac{\varepsilon}{r}. \quad (9)$$

Как видно из (8) и (9), деформации l_r и l_{τ} определяются функцией ε , поэтому они являются совместимыми. Дифференцируя l_{τ} по r , получаем

$$\frac{dl_{\tau}}{dr} = \frac{1}{r} \left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r} \right) = \frac{1}{r} (l_r - l_{\tau}). \quad (10)$$

Заменив l_r и l_{τ} в уравнениях (8) и (9), запишем уравнение связи для σ_r и σ_{τ} :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{E} (\sigma_{\tau} - \mu \sigma_r) \right] = \frac{1+\mu}{rE} (\sigma_r - \sigma_{\tau}) \quad (11)$$

или

$$\frac{d\sigma_{\tau}}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1+\mu}{r} (\sigma_r - \sigma_{\tau}). \quad (12)$$

Так как диск вращается с угловой скоростью ω , то на элемент x действует сила инерции:

$$dF_{\text{и}} = \frac{m\upsilon^2}{r}, \quad (13)$$

где m – масса выделенного элемента x ,

$$m = \frac{\rho dr \cdot r d\varphi}{g}; \quad (14)$$

ρ – плотность стали диска, г/см³;

φ – центральный угол (рис. 1, б, в), рад;

g – ускорение свободного падения;

$\upsilon = \omega r$ – окружная скорость вращения диска;

ω – угловая скорость вращения диска, с⁻¹;

r – текущий радиус элемента.

Тогда, напряжения от силы инерции

$$d\sigma_{\text{и}} = \frac{dF_{\text{и}}}{F_{\text{и}}} = \frac{\omega^2 r \rho}{g} dr, \quad (15)$$

Подставляя в уравнение равновесия (5) уравнения (12) и (16), получаем линейное дифференциальное уравнение

$$r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{(3+\mu)\rho \omega^2 r}{g} = 0 \quad (16)$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \sigma_r \right) \right] + \frac{(3 + \mu) \rho \omega^2 r}{g} = 0. \quad (17)$$

Проинтегрируем уравнение (17):

$$\sigma_r = \alpha + \frac{\beta}{r^2} - \frac{(3 + \mu) \rho \omega^2 r^2}{8g}. \quad (18)$$

Из уравнений (5) и (18) получим формулу для определения тангенциальных напряжений:

$$\sigma_\tau = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\rho^2 \omega^2 r^2}{g} = \alpha - \frac{\beta}{r^2} - \frac{(3 + 3\mu) \rho \omega^2 r^2}{8g}. \quad (19)$$

В уравнениях (18) и (19) α и β являются постоянными интегрирования, которые определяются особенностями конструкции диска и его крепления на валу. Эти постоянные можно найти для удобно «плавающего» крепления диска на валу при $r = r_1 = r_2$.

Тогда из формулы (18) имеем

$$\alpha = \frac{(3 + \mu) \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2)}{8g} = \frac{(3 + \mu) \rho \omega^2 r_1^2 r_2^2}{8g}. \quad (20)$$

Введем условные обозначения:

$$\frac{(3 + 3\mu) \rho \omega^2 r_1^2}{8g} = C; \quad \frac{r_2}{r_1} = A; \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} = B; \quad \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} = D, \quad (21)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Решение поставленной задачи по аналитическому определению возникающих в диске напряжений сводится к решению следующих уравнений:

$$\sigma_r = C \left[1 + A^2 \left(1 - \frac{1}{B^2} - B^2 \right) \right]; \quad \sigma_\tau = C \left[1 + A^2 \left(1 - \frac{1}{B^2} \right) - DB^2 \right]. \quad (22)$$

С помощью ЭВМ для различных значений B (т.е. для различных вариантов расположения элемента x по корпусу диска) построена закономерность распределения напряжений по корпусу диска (рис. 2). Как видно из рис. 2, численные значения тангенциальных напряжений значительно превосходят радиальные, т.е. диск имеет запас прочности на промышленных частотах вращения.

Установлено, что действующая величина напряжений в диске

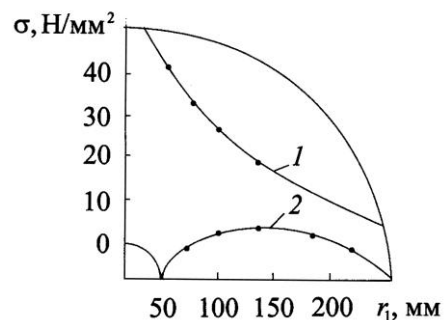
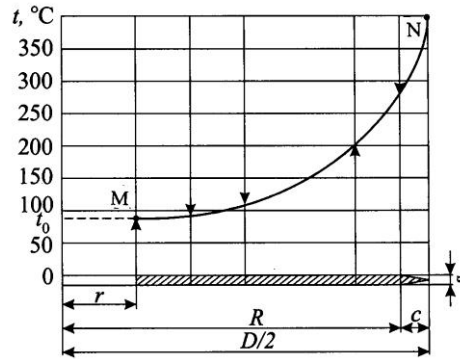


Рис. 2. Распределение напряжений по корпусу диска наружным радиусом r_1 , который измеряется от посадочного размера 50 мм: 1 – тангенциальное напряжение σ_τ ; 2 – радиальное напряжение σ_r .

Рис. 3. Температурное поле сплошного режущего диска в нормальных условиях работы



находится в квадратичной зависимости от угловой скорости вращения. Поэтому на больших частотах предпочтительно использовать режущий диск меньшего диаметра. В процессе бесстружечного деления древесины мягких пород дисками, используемыми вместо круглых пил, основная энергия затрачивается на преодоление сил трения, возникающих на боковых поверхностях дисков. Специфика работы диска определяется величиной температурного перепада между режущими элементами и центральной зоной диска.

При внедрении безотходной и высокоперспективной технологии резания реальная задача конструкторов – выбор способов и средств уменьшения данного температурного перепада. В нормальных условиях работы диска его температурное поле представлено на рис. 3 (получено на основе экспериментальных исследований). С достаточной степенью точности изменение температурного поля диска можно описать зависимостью

$$t = \Delta t \left(\frac{D}{2R} \right)^n + t_0, \quad (23)$$

где $\Delta t = t_r - t_0$;

t_r – температура на окружности резания;

t_0 – температура диска у посадочного отверстия.

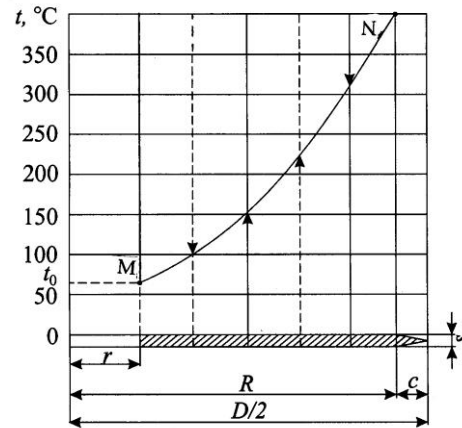
Расчет напряжения проводим по известным формулам [1]:

$$\sigma_0 = E \left(-\frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha t dr + \frac{R^2 - d^2}{R^2 (R^2 - d^2)} \int_0^R \alpha t dr \right); \quad (24)$$

$$\sigma_k = E \left(-\alpha t + \frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha t dr + \frac{R^2 + d^2}{R^2 (R^2 - d^2)} \int_0^R \alpha t dr \right). \quad (25)$$

Здесь E – модуль упругости материала диска;
 R – радиус наружной окружности диска;
 t – текущая температура диска;
 d – диаметр посадочного отверстия.

Рис. 4. Температурное поле трения диска о древесину



Температурное поле трения диска представлено на рис. 4. Длина участка MN пропорциональна толщине разделяемого материала. Кривую на рис. 4 аналитически можно выразить уравнением параболы. Проведем расчет напряжений по окружности резания:

$$\sigma = E \left(-\frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha t dr + \frac{C_1}{1-\mu} - \frac{C_2}{R^2(1-\mu)} \right), \quad (26)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, которые определяют для следующих граничных условий: $\sigma_r = 0$; $\sigma_N = \sigma_{max}$.

σ_r – напряжения, возникающие в кольце, близком к контуру, при нагреве диска;

σ_{max} – температурные напряжения в режущей части диска.

С учетом граничных условий имеем

$$C_1 = \frac{1-\mu}{R^2-r^2} \int_r^R \alpha t R dr - \frac{\sigma_{max} r^2 (1-\mu)}{E(R^2-r^2)}; \quad (27)$$

$$C_2 = \frac{r^2(1-\mu)}{R^2-r^2} \int_r^R \alpha t R dr - \frac{\sigma_{max} r^2 R^2 (1+\mu)}{E(R^2-r^2)}. \quad (28)$$

Подставляя граничные условия в уравнение (28), можно рассчитать напряжение σ по окружности резания:

$$\sigma = E \left(-\frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha t dr + \frac{R^2-r^2}{R^2(R^2-r^2)} \int_r^R \alpha t R dr + \frac{\sigma_{max} r^2}{E r^2} \right). \quad (29)$$

В данном уравнении единственной неизвестной величиной является σ_{max} , которую можно рассчитать с использованием ЭВМ, используя понятие жесткости:

$$i_n = \frac{\sigma_{max}}{T}, \quad (30)$$

где i_n – жесткость наружной части диска;

T – температурное расширение наружной части диска.

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{T - \Pi}{\frac{1}{i_b} - \frac{1}{i_n}}, \quad (31)$$

где Π – тепловое расширение внутренней части диска;

i_b – жесткость внутренней части диска.

Расчет температурных напряжений в режущих дисках двумя способами (через напряжение и через экспериментально найденные величины жесткости) указывает на достаточную степень точности предложенной методики и позволяет использовать полученные зависимости для анализа и конструирования как самих режущих дисков в целом, так и их отдельных элементов (режущие кромки, технологические отверстия, термокомпенсационные отверстия, виброгасящие устройства) [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев, Н.М.* Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1975. – 600 с.
2. *Ивановский, В.П.* Бесстружечное резание древесины мягких пород [Текст] / В.П. Ивановский. – Воронеж: ВГУ, 2003. – 168 с.
3. Краткий справочник металлиста [Текст]. – М.: Машиностроение, 1987. – 960 с.
4. *Свиридов, Л.Т.* Качество дереворежущих инструментов [Текст] / Л.Т. Свиридов, В.П. Ивановский // Дизайн и производство мебели. – 2005. – № 1(6). – С. 44–51.
5. *Стахийев, Ю.М.* Устойчивость и колебания плоских круглых пил [Текст] / Ю.М. Стахийев. – М.: Лесн. пром-сть, 1977. – 296 с.

Воронежская государственная
лесотехническая академия

Поступила 17.06.05

V.P. Ivanovsky

Stress State of Woodcutting Disc

It is established that it is preferable to use woodcutting disc with minimal diameter with growing speed.

