## КОМПЬЮТЕРИЗАЦИЯ УЧЕБНЫХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 519.23:621.029

*А.А. Рогов*

Рогов Александр Александрович родился в 1959 г., окончил в 1985 г. Петрозаводский государственный университет, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования систем управления ПетрГУ. Имеет 75 печатных работ в области математического моделирования, статистического анализа, методов оптимизации.

# ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕМА ПОСТАВОК ЗАПАСНЫХ ЧАСТЕЙ

Разработана программа, позволяющая с вводом фактических данных о функционировании станции технического обслуживания лесозаготовительного предприятия рассчитывать средние значения эксплутационной эффективности и получать рекомендации об объеме поставляемой партии запасных частей.

*Ключевые слова*: математическое моделирование, функция восстановления, статистические оценки, оптимизация объема поставок, запасные части.

*Обоснование задачи*

Для решения задачи оптимизации объема поставок на станцию технического обслуживания (СТО) лесозаготовительного предприятия предложена математическая модель ее функционирования между поставками. При построении модели использовали следующие предположения: СТО обслуживает фиксированное количество машин разных типов; поставки запасных частей осуществляют партиями через заранее определенный период, длительность которого $T$; объем поставки определяют непосредственно перед поставкой. Стратегия работы СТО: ремонт начинается сразу после возникновения аварийной ситуации на какой-либо машине, если на складе есть необходимая запасная часть, при отсутствии – заказывают ее у поставщика и ремонт начинают после получения.

В качестве целевого функционала при решении задачи оптимизации объема поставок запасных частей, требуемых для работы станции между двумя поставками, применяют математическое ожидание суммарного дохода от использования машин за вычетом потерь из-за аварийных простоев и затрат на их ликвидацию при наличии и отсутствии запасных частей с учетом стоимости их хранения на складе или дополнительных поставок. Математическая модель строиться в зависимости от того, больше или нет количество запасных частей количества аварийных отказов. Во втором случае для описания дохода используют дополнительную переменную, выражающую количество аварийных отказов, удовлетворенных со склада СТО. Анализ оптимизационной модели проводят при естественных допущениях о независимости и одинаковой распределенности случайных величин, выражающих продолжительность промежутков между отказами и восстановлений по каждой причине на конкретной машине. Модель не предполагает, что поток отказов является пуассоновским. Как показывают статистические исследования, предположение о пуассоновости потока в данном случае является сомнительным [1, 2].

Для данной оптимизационной задачи удалось найти аналитическое решение. При практическом использовании модели требуется ввести информацию о работе СТО. Для определения некоторых средних характеристик, таких как среднее число отказов или восстановлений, предлагается использовать статистические оценки функции восстановления, так как данные имеют, как правило, цензурированный характер.

Разработана программа, позволяющая при вводе фактических данных о функционировании СТО рассчитывать средние значения и получать рекомендации об объеме поставляемой партии запасных частей.

*Описание математической модели*

Введем следующие величины:

$P^i$, $i = 1, 2, ..., n$ – стоимость произведенной продукции в единицу времени (ч) $i$-й машины;

$l$ – число типономиналов наименований запасных деталей, применяемых для восстановления работоспособности машин;

$m^j$, $j = 1, 2, ..., l$ – число запасных деталей $j$-го наименования, находящихся на хранении в начальный период функционирования СТО;

$A(T)^{i,j}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$ – число аварийных отказов $j$-й детали $i$-й машины за период времени $T$;

$x^{i,j}{}_k$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$, $k = 1, 2, ..., A(T)^{i,j}$ – продолжительность времени между $k – 1$ восстановлением и $k$-м аварийным отказом $j$-й детали $i$-й машины, ч;

$t^{i,j}{}_k$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$, $k = 1, 2, ...$ – продолжительность восстановления после $k$-го аварийного отказа $j$-й детали $i$-й машины (ч) при наличии запасной части;

$\tau^{i,j}{}_k$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$, $k = 1, 2,...$ – продолжительность восстановления после $k$-го аварийного отказа $j$-й детали $i$-й машины (ч) при отсутствии запасной части;

$C^{i,j}{}_k$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$, $k = 1, 2,...$ – стоимость восстановления после $k$-го аварийного отказа $j$-й детали $i$-й машины (ч) при наличии запасной части;

$Ca^{i,j}{}_k$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$, $k = 1, 2,...$ – стоимость восстановления после $k$-го аварийного отказа $j$-й детали $i$-й машины (ч) при отсутствии запасной части;

$Cxp^j$, $j = 1, 2, ..., l$ – стоимость хранения $j$-й детали в единицу времени (ч);

$Cp^j$, $j = 1, 2, ..., l$ – стоимость $j$-й детали при покупке партией, р.;

$Cr^j$, $j = 1, 2, ..., l$ – стоимость $j$-й детали при экстренной покупке, р.

Затраты на ремонт при аварийной замене детали $j$-го наименования $R^j$ от всех машин за период $T$ составят:

если $m^j \geq \sum_{i=1}^{n} A(T)^{i,j}$, то

$$R^j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{A(T)^{i,j}} \left( C_k^{i,j} + P^i t_k^{i,j} + Cp^j + Cxp^j \left( \sum_{s=1}^{k-1} \left( x_s^{i,j} + t_s^{i,j} \right) + x_k^{i,j} \right) \right) + \\ + \left( m^j - \Sigma A(T)^{i,j} \right) \left( Cp^j + TCxp^j \right); \qquad (1)$$

если $m^j < \sum_{i=1}^{n} A(T)^{i,j}$, то для описания дохода понадобиться переменная $\mu(T)^{i,j}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$ – количество аварийных отказов $j$-й детали $i$-й машины за период $T$, удовлетворенных со склада СТО, тогда

$$R^j = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{\mu(T)^{i,j}} \left( C_k^{i,j} + P^i t_k^{i,j} + Cp^j + Cxp^j \left( \sum_{s=1}^{k-1} \left( x_s^{i,j} + t_s^{i,j} \right) + x_k^{i,j} \right) \right) + \\ + \sum_{k=1}^{A(T)^{i,j} - \mu(T)^{i,j}} \left( Ca_k^{i,j} + P^i \tau_k^{i,j} + Cr^j \right) \right). \qquad (2)$$

Суммарный доход от всех машин за период $T$ составит

$$F(T, m) = \sum_{i=1}^{n} TP^i + \sum_{j=1}^{l} R^j,$$

где $m = (m^1, m^2, ..., m^l)$.

Средний суммарный доход (математическое ожидание) от использования $n$ машин при учете всей номенклатуры запасных частей за период $T$ :

$$\overline{F}(m) = M\left[F(T, m)\right] = \sum_{i=1}^{n} TP^i + \sum_{j=1}^{l} M\left[R^j\right]. \qquad (3)$$

Задача оптимизации числа запасных частей на СТО ставится следующим образом: выбрать такое число запасных частей $m$, чтобы средний суммарный доход от функционирования СТО $\overline{F}(m)$ за период $T$ был максимальным.

*Анализ целевого функционала*

Анализ целевого функционала (3) будем проводить при следующем допущении: случайные величины, выражающие число отказов и их продолжительность $A(T)^{i,j}$, $x^{i,j}{}_k$, $t^{i,j}{}_k$, $\tau^{i,j}{}_k$ , являются независимыми. При этом допущении значения величин $M[R^j]$, $j = 1, 2, \ldots l$ не влияют друг на друга. Это означает, что максимальное значение $\overline{F}(m)$ достигается тогда и только тогда, когда $M[R^j]$, $j = 1, 2, \ldots l$ принимают минимальное значение. При анализе оптимизационной задачи сделаем предположение, что среднее число аварий по $j$-й причине не зависит от $m^j$ – числа запасных частей. Это предположение имеет место, если промежутки времени между авариями значительно больше продолжительности их устранения. Зафиксируем $j$ и найдем, когда $M[R^j]$ принимает минимальное значение. Для этого введем обозначения: $M[A(T)^{i,j}] = B(T)^{i,j}$; $M[x_k^{i,j}] = \bar{x}^{i,j}$; $M[t_k^{i,j}] = \bar{t}^{i,j}$; $M[\tau_k^{i,j}] = \bar{\tau}^{i,j}$; $M[C_k^{i,j}] = \overline{C}^{i,j}$; $M[Ca_k^{i,j}] = \overline{Ca}^{i,j}$.

Если число запасных частей больше средней потребности, то это означает, что $m^j \geq \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j}$. Следовательно,

$$M[R^j] = \sum_{i=1}^{n} M[W^{i,j}] + \left( m^j - \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} \right)\left( Cp^j + TCxp^j \right).$$

Можно доказать, что минимум $M[R^j]$ достигается при

$$m^j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j}, & \text{åñëè } \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} - \text{öåëîå}; \\ \left[ \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} \right] + 1, & \text{åñëè } \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} - \text{äðîáíîå} \end{cases},$$

где квадратные скобки выделяют целую часть числа.

Если число запасных частей меньше средней потребности, то это означает, что $m^j = \sum_{i=1}^{n} \mu(T)^{i,j}$. Введем следующие обозначения:

$$A_{i,j} = \frac{Cxp^j}{2}\left( \bar{x}^{i,j} + \bar{t}^{i,j} \right);$$

$$D_{i,j} = \left( \overline{C}^{i,j} + P^i \bar{t}^{i,j} + Cp^j + \frac{Cxp^j}{2}\left( \bar{x}^{i,j} - \bar{t}^{i,j} \right) - \overline{C}a^{i,j} - P^i \bar{\tau}^{i,j} - Cr^j \right);$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} \left( \overline{C}a^{i,j} + P^i \bar{\tau}^{i,j} + Cr^j \right).$$

Тогда из формулы (2) определим

$$M[R^j] = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} \left( \mu(T)^{i,j} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} D_{i,j} \mu(T)^{i,j} + S. \qquad (4)$$

Здесь минимизируем (4) при условии $m^j = \sum_{i=1}^{n} \mu(T)^{i,j}$. Обозначим через $m^{j*} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{i,j}}{A_{i,j}}$. Анализ (4) при $0 \leq m^j \leq \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j}$ показал, что минимум $M[R^j]$ достигается при условии

$$m^j = \begin{cases} 0, & \text{åñëè} \quad m^{j*} < 0; \\ \left[ m^{j*} + \frac{1}{2} \right], & \text{åñëè} \quad 0 \leq \left[ m^{j*} + \frac{1}{2} \right] \leq \left[ \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} \right]; \\ \left[ \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} \right], & \text{åñëè} \quad \left[ m^{j*} + \frac{1}{2} \right] > \left[ \sum_{i=1}^{n} B(T)^{i,j} \right]. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рогов А.А.* Моделирование эксплуатационной эффективности технического объекта. Статистический анализ и проверка адекватности: Учеб. пособие. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2001. – 215 с.

2. *Рогов А.А., Шиловский В.Н., Зубов Д.В.* Определение оптимального объема поставок запасных частей // Прикладная математика и информатика: Тр. ПетрГУ. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2001. – Вып.10. – С. 35–47.

Петрозаводский государственный
университет

Поступила 02.03.04

*A.A. Rogov*

**Optimization of Spare Parts Supply**

Software has been developed allowing to calculate mean values of operational efficiency and produce recommendations on the volume of the supplied spare parts by entering actual data on service station operation of a forest-harvesting enterprise.