



## МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДРЕВЕСИНЫ И ДРЕВЕСИНОВЕДЕНИЕ

УДК 536.24:674.047

**О.Р. Дорняк**

Воронежская государственная лесотехническая академия

Дорняк Ольга Роальдовна окончила в 1978 г. Воронежский государственный университет, доктор технических наук, и.о. зав. кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики Воронежской государственной лесотехнической академии. Имеет около 140 печатных работ в области процессов тепло- и массопереноса, математического моделирования, механики гетерогенных материалов, реологии.  
E-mail: olga@dorn.vrn.ru, sushka.vrn2010@yandex.ru



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СУШКИ ДРЕВЕСИНЫ

Представлена математическая модель теплофизических процессов в древесине как в трехфазной системе с учетом широкого спектра физических и структурных факторов.

*Ключевые слова:* древесина, сушка, математическое моделирование, гетерофазная среда.

Прогресс в технологиях сушки древесины возможен на основе изучения фундаментальных закономерностей тепло- и массопереноса в этом сложном материале. Большое число физических и структурных факторов, определяющих результат интенсивного теплового воздействия на древесину, делает недоступным исследование механизма явлений путем прямого физического эксперимента. Успехи в этом направлении возможны при использовании методов математического моделирования.

К ограничениям известных исследований по моделированию тепломассопереноса в древесине, в частности [6, 7], следует отнести подход к древесине как к гомогенной среде, одномерный характер изучаемых процессов и недостаточный учет термодинамических особенностей поверхностно-капиллярных явлений. Для изучения движения газов и жидкостей, тепло- и массопереноса в реальных пористых средах, имеющих нерегулярную структуру, нельзя использовать обычные уравнения переноса, применяемые в сплошных гомогенных средах [5]. В таких системах как древесина, где внешние воздействия могут вызвать существенно различное поведение фаз и сделать значительными эффекты их взаимовлияния, основой математического моделирования явлений может быть механика многофазных систем [4].

---

© Дорняк О.Р., 2012

Цель данной работы – создание математической модели теплофизических процессов в древесине как трехфазной системе (твердая, жидкая и газообразная фазы) с учетом широкого спектра физических и структурных факторов, а также соответствующего программного комплекса.

Пусть древесный образец имеет форму бруска прямоугольного сечения (рис. 1). Материал считается трансверсально-изотропным. Волокна параллельны одной из сторон бруска, например  $x_3$ . Начальная влажность по сечению образца может быть распределена произвольно. Жидкая фаза практически несжимаема, ее плотность постоянна. Влага из образца удаляется в виде пара. Перенос пара осуществляется преимущественно вдоль волокон и  $v_1^1 \ll v_1^3$ ,  $v_1^2 \ll v_1^3$  (где  $v$  – скорость). При этом  $v_1^3 = v_1^3(x_1, x_2, x_3)$ . Верхние индексы 1, 2, 3 обозначают компоненты векторов, нижние – принадлежность соответственно к газообразной (1), жидкой (2), твердой (3) фазам.

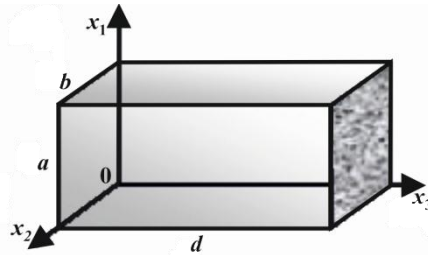


Рис. 1. Расчетная схема

Запишем уравнения для усредненных по объемам фаз значений переменных, следуя [4] и опуская знак усреднения  $\langle \dots \rangle$ . Например, под переменной  $f_2$  подразумевается  $\langle f_2 \rangle_2$ . Подчеркнем, что усреднение макроскопических переменных производится не по всему объему образца, как это принято в гомогенных системах, а по объему конкретной фазы, что обеспечивает возможность более глубокого анализа процессов тепло- и массопереноса в изучаемой гетерофазной среде.

Газовая фаза состоит из двух компонент – неконденсирующийся газ и водяной пар. Параметры, относящиеся к первой компоненте, имеют нижний индекс 1g, ко второй компоненте – 1v. Плотность парогазовой смеси  $\rho_1$  и концентрация  $\chi$  составляющих определены следующим образом:

$$\rho_1^{\circ} = \rho_{1v}^{\circ} + \rho_{1g}^{\circ}; \chi = \frac{\rho_{1v}^{\circ}}{\rho_1^{\circ}}; 1 - \chi = \frac{\rho_{1g}^{\circ}}{\rho_1^{\circ}}. \quad (1)$$

Здесь знак « $\circ$ » означает истинное значение физической величины.

Примем предположение об идеальности паровой и газовой компонент. Для парциального давления  $p$  и удельной внутренней энергии  $u$  имеем:

$$p_{1g} = \rho_{1g}^{\circ} T_1 B_{1g}; u_{1g} = c_{v1g} T_1; p_{1v} = \rho_{1v}^{\circ} T_1 B_{1v}; u_{1v} = c_{v1v} T_1, \quad (2)$$

где  $T$  – температура, К;

$B$  – индивидуальная газовая постоянная, Дж/(кг · К);

$c_v$  – теплоемкость при постоянном объеме, Дж/(кг · К);

Давление в парогазовой смеси определяется законом Дальтона для смеси идеальных газов:

$$p_1 = \rho_1^{\circ} T_1 B_1; B_1 = \chi B_{1v} + (1 - \chi) B_{1g}. \quad (3)$$

Значения скорости паровой и газовой компонент могут быть различны. Для их описания введены среднemasсовая скорость смещений элементарных макрообъемов первой фазы  $v_1$  и диффузионные скорости пара и газа  $w_{1v}$  и  $w_{1g}$ :

$$v_1 = \chi v_{1v} + (1 - \chi)v_{1g}; \quad w_{1g} = v_{1g} - v_1; \quad w_{1v} = v_{1v} - v_1. \quad (4)$$

Относительное движение компонент определяется законом бинарной диффузии Фика:

$$w_{1g}^3 = \frac{\rho_1^0}{\rho_{1g}^0} D \frac{\partial \chi}{\partial x_3}; \quad w_{1v}^3 = -\frac{\rho_1^0}{\rho_{1v}^0} D \frac{\partial \chi}{\partial x_3}, \quad (5)$$

где  $D$  – коэффициент бинарной диффузии, зависящий в общем случае от температуры газа.

Уравнения сохранения массы для парогazовой смеси и газовой компоненты при сделанных предположениях имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho_1^0 \alpha_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 \alpha_1 v_1^3)}{\partial x_3} = s_{12} j; \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1; \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_1^0 \alpha_1 (1 - \chi))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 \alpha_1 (1 - \chi)(v_1^3 + w_g^3))}{\partial x_3} = 0, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – объемное содержание (безразмерная величина);

$j$  – поток массы пара, обусловленный фазовыми переходами, отнесенный к единице времени и единице площади, кг/(м<sup>2</sup>·с);

$s_{12}$  – удельная поверхность раздела 1-й и 2-й фаз, м<sup>-1</sup>.

Случай  $j > 0$  соответствует испарению,  $j < 0$  – конденсации.

Запишем уравнение движения и теплопроводности парогazовой фазы при сделанных предположениях:

$$\rho_1^0 \alpha_1 \left( \frac{\partial v_1^3}{\partial t} + v_1^3 \frac{\partial v_1^3}{\partial x_3} \right) = -\alpha_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_3} - \frac{\alpha_1 \mu_1 v_1^3}{K_{13}^{33} \Psi_1(\theta_1)}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c_{p1} \rho_1^0 \alpha_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + v_1^3 \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \right) &= \alpha_1 B_1 T_1 \left( \frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + v_1^3 \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x_3} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \alpha_1 \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \alpha_1 \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \alpha_1 \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \right) + \\ &+ \alpha_1 B_1 T_1 \left( \frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + v_1^3 \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x_3} \right) + c_{v1} s_{12} j (T_1|_{\Sigma_{12}} - T_1) + Q_{21} + Q_{31}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$c_{p1} = \chi c_{p1v} + (1 - \chi) c_{p1g}; \quad Q_{ji} = s_{ij} \alpha_{ji}^h (T_i|_{\Sigma_{ij}} - T_i); \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь  $K_{13}^{mm}$  – коэффициент проницаемости 1-й фазы при полном насыщении в направлении  $m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) м<sup>2</sup>;

$\Psi(\theta)$  – относительная фазовая проницаемость;

$\theta_1$  – насыщенность объема порового пространства газообразной фазой;

$c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг·К);

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

$\alpha_{ij}^h$  – коэффициент теплоотдачи между фазами  $i$  и  $j$ , Вт/м.

Запишем уравнение теплопроводности для твердой фазы:

$$c_3 \rho_3^0 \alpha_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = Q_{13} + Q_{23} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_3 \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\alpha_3 \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_3 \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x_3}). \quad (10)$$

Постановка задачи переноса жидкой фазы для процессов сушки древесины имеет особенности, связанные с тем, что механизм переноса воды зависит от формы ее связи с твердой фазой [3]. Известно, что свободная вода неподвижна в порах, если отсутствует внешний градиент давления. Ее удаление происходит за счет испарения. Связанная вода в тонких прослойках между твердыми поверхностями не испытывает фазовых переходов и при этом практически неподвижна вследствие высокого гидродинамического сопротивления. Связанная вода другого типа, которая формирует искривленные тонкие слои жидкости, смачивающие твердую фазу и имеющие границу раздела с парогазовой смесью, движется в результате воздействия градиента давления, который обусловлен проявлениями капиллярных эффектов 1-го и 2-го рода. Движение воды в граничных слоях происходит из области с большей насыщенностью в область с меньшей. Для описания этих явлений проведено дополнительное усреднение гидродинамических параметров по объемам свободной воды, воды в тонких прослойках и смачивающих пленках.

Представим усредненное давление в жидкой фазе в виде

$$\langle p_2 \rangle_2 = (m_{2cb} p_{2cb} + m_{2cm} p_{2cm} + m_{2т.сл} p_{2т.сл}) / \alpha_2.$$

Здесь введены дополнительные структурные параметры объемного содержания в образце свободной воды  $m_{cb} = dV_{2cb}/dV$ , воды граничных слоев в тонких капиллярах  $m_{т.сл} = dV_{2т.сл}/dV$  и воды в смачивающих пленках  $m_{cm} = dV_{2cm}/dV$ .

При решении задач кинетики переноса воды в пористых телах, где скорости течения пленок обычно невелики, можно воспользоваться уравнением Кельвина, справедливым в условиях локального равновесия на границе пленки с паром [1]. Полагая, что давление объемной жидкости равно давлению насыщенного пара над ее плоской поверхностью, для давления в смачиваемых слоях имеем:

$$p_{2cm} = p_{sat}^o + P = p_{sat}^o + \frac{RT}{\bar{v}} \ln \frac{p_{sat}}{p_{sat}^o}, \quad (11)$$

где  $p_{sat}^o$  – равновесное давление насыщенного пара над мениском и над плоской поверхностью воды;

$\bar{v}$  – объем 1 моля воды.

Так как твердая фаза древесины имеет гидрофильные свойства, мениски воды в ней вогнутые и  $p_{\text{sat}} < p_{\text{sat}}^{\circ}$ , то  $p_{2\text{см}} < p_{\text{sat}}^{\circ}$ . Формула Кельвина (11) позволяет вычислять давление в жидкости с учетом капиллярных эффектов 1-го и 2-го рода, избегая прямого вычисления капиллярного и расклинивающего давлений в тонких искривленных смачивающих пленках на поверхности твердой фазы. Используя формулу Кельвина (11) и уравнение изотермы сорбции в виде

$$\varphi = \frac{p_{1v}}{p_{\text{sat}}(T)} = F(W, T), \quad (12)$$

имеем зависимость давления воды от влажности  $W$  и температуры  $T$  в рамках равновесной термодинамики двухфазных многокомпонентных систем.

Характерное время процесса сушки может оказаться сопоставимым с временем установления полей капиллярного и расклинивающего давлений. В этом случае процесс не является равновесным. Для учета неравновесных эффектов приняты различные температуры фаз гетерофазной системы. В качестве температуры  $T$  в выражениях (11) и (12) используется температура жидкости в поверхностной фазе  $\Sigma_{12}$ . Уравнения сохранения массы, количества движения свободной и адсорбционной воды подробно представлены в [2]. В данной работе приведем уравнение теплопроводности жидкой фазы:

$$c_2 \rho_2^{\circ} \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\alpha_2 \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_3}) - c_2 s_{12} j(T_2|_{\Sigma_{12}} - T_2) + Q_{12} + Q_{32}, \quad (13)$$

а также уравнения сохранения для воды в смачивающих пленках, реализуемых в тех зонах образца, где влажность древесины не превышает предела гигроскопичности:

$$\rho_2^{\circ} \left[ \frac{\partial (m_{2\text{см}})}{\partial t} + \nabla (m_{2\text{см}} \bar{v}_{2\text{см}}) \right] = -j s_{12} + q_{\text{т.с}}; \quad (14)$$

$$\rho_2^{\circ} m_{2\text{см}} \frac{\partial \bar{v}_{2\text{см}}}{\partial t} = -m_{2\text{см}} \nabla p_{2\text{см}} - \frac{3m_{2\text{см}} (K^{-1})_2^{kk} \mu_2 (v_{2\text{см}}^1 - v_3^1)}{\Psi_2(\theta_{2\text{см}})} + \nabla (m_{2\text{см}} \sigma_{2\text{см}}). \quad (15)$$

Здесь  $q_{\text{т.с}}$  – объемный расход жидкости в тонких прослойках (смачивающие пленки подпитываются водой тонких прослоек), кг/(м<sup>2</sup>·с);

$(K^{-1})_2^{kk}$  – след тензора, обратного тензору проницаемости 2-й фазы, м<sup>2</sup>;

$\mu$  – вязкость, Па·с;

$\sigma_{2\text{см}}$  – тензор напряжений жидкой фазы в смачивающих пленках, Па.

Математическая модель включает уравнения сохранения на межфазных поверхностях. На границе раздела «жидкость–пар» в общем случае следует учитывать неравновесность фазовых переходов, связанную с тем, что количество пара, испаряющегося с поверхности раздела фаз зависит от кинетических возможностей паровой фазы. Кинетика неравновесных фазовых переходов

описывается уравнением Герца–Кнудсена–Ленгмюра. Взаимосвязь между давлением и температурой вдоль линии насыщения определяется уравнением Клапейрона–Клаузиуса. Неравновесная схема фазовых переходов предполагает наличие скачка температур в граничном кнудсеновском слое пара [4].

Уравнение сохранения энергии в поверхностной  $\Sigma_{12}$  фазе без учета тепловой инерции этой фазы и влияния искривленности межфазных поверхностей на ее температуру представим в виде

$$s_{12}jL = \alpha_{1\Sigma_{12}}^h s_{12}(T_1 - T_1|_{\Sigma_{12}}) + \alpha_{2\Sigma_{12}}^h s_{12}(T_2 - T_2|_{\Sigma_{12}}). \quad (16)$$

Условия теплообмена на остальных поверхностях раздела фаз могут быть записаны в виде следующих балансовых соотношений:

$$s_{13}\alpha_{3\Sigma_{13}}^h (T_{\Sigma_{13}} - T_3) = -s_{13}\alpha_{1\Sigma_{13}}^h (T_{\Sigma_{13}} - T_1); \quad (17)$$

$$s_{23}\alpha_{3\Sigma_{23}}^h (T_{\Sigma_{23}} - T_3) = -s_{23}\alpha_{2\Sigma_{23}}^h (T_{\Sigma_{23}} - T_2). \quad (18)$$

Краевые условия на внешних границах бруска:

для пара

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma} &= \beta_1^{\Gamma} (p_1|_{\Gamma} - p_c); \quad -\frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \gamma_1^{\Gamma} (\chi|_{\Gamma} - \chi_c); \\ \alpha_1|_{\Gamma} &= 1 - \alpha_2|_{\Gamma} - \alpha_3|_{\Gamma}; \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \alpha_1^{\Gamma} (T_1|_{\Gamma} - T_c); \end{aligned} \quad (19)$$

для жидкости

$$\begin{aligned} v_2^1|_{\Gamma} &= 0; \quad v_2^2|_{\Gamma} = 0; \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \alpha_2^{\Gamma} (T_2|_{\Gamma} - T_c); \\ \alpha_2|_{\Gamma} &= 0,01W(T_c, \varphi_c)\alpha_3\rho_3^{\circ}/\rho_2^{\circ}; \end{aligned} \quad (20)$$

для твердой фазы

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \alpha_3^{\Gamma} (T_3|_{\Gamma} - T_c). \quad (21)$$

Здесь  $\alpha_i^{\Gamma}$  – коэффициент теплоотдачи  $i$ -й фазы к окружающей среде, Вт/м<sup>2</sup>;  $\beta_i^{\Gamma}$ ,  $\gamma_i^{\Gamma}$  – коэффициенты массообмена  $i$ -й фазы с окружающей средой, м<sup>-1</sup>.

Индекс «г» означает принадлежность к внешним границам древесного образца, «с» – к окружающей среде.

Начальные условия имеют следующий вид:

$$v_1^3 = 0; \quad \alpha_1 = \alpha_{10}; \quad \chi = \chi_0; \quad v_2^1 = 0; \quad v_2^2 = 0; \quad (22)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{20}(x_1, x_2, x_3); \quad T_1 = T_2 = T_3 = T_0(x_1, x_2, x_3).$$

Поставленная начально-краевая задача (1)–(22) является нелинейной. Ее исследование выполнено с помощью численных методов. Проведена аппроксимация дифференциальной задачи разностной, разработан вычислительный алгоритм и соответствующий программный комплекс, что позволяет проводить вычислительный эксперимент по регулированию процесса сушки.

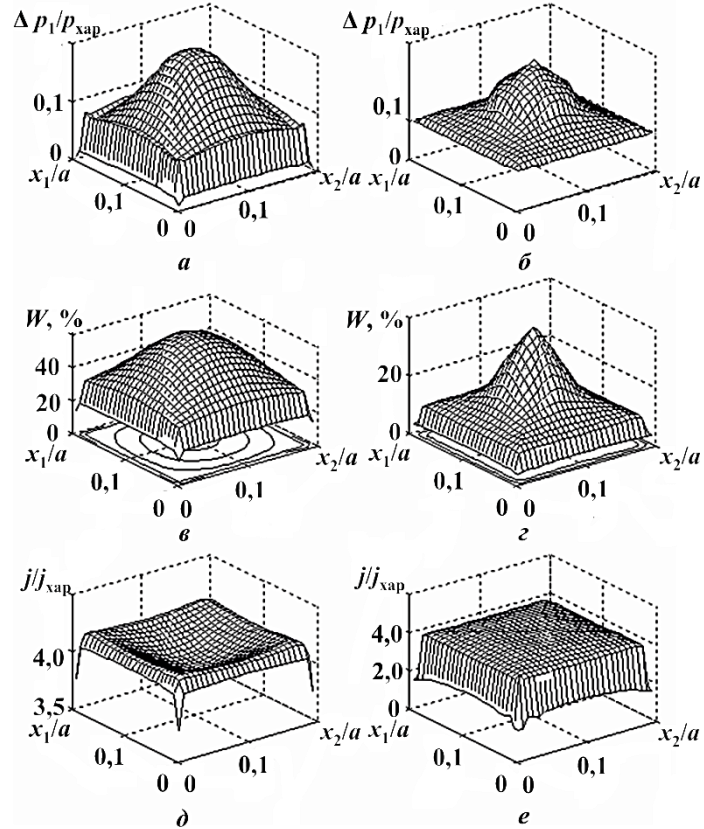


Рис. 2. Распределение в центральном поперечном сечении образца ( $x_3/l_{\text{хар}} = 0,5$ ) избыточного давления в газообразной фазе  $\Delta p = p_1 - p_c$  (а, б), влажности  $W$  (в, г) и интенсивности парообразования  $j$  (д, е) при сушке в моменты времени  $t/t_{\text{хар}} = 0,1$  (а, в, д),  $t/t_{\text{хар}} = 4,0$  (б, г, е) ( $t_c = 120$  °С; температура мокрого термометра  $t_m = 84$  °С;  $\tau_{\text{хар}} \approx 15$  мин;  $j_{\text{хар}} = \rho_2 l_{\text{хар}}/t_{\text{хар}}$ ; размеры образца  $25 \times 25 \times 125$  мм)

Задаются параметры сушильного агента (температура, давление и относительная влажность), а также произвольные неоднородные начальные поля температуры и влажности в образце. Результат численного моделирования – детальное описание характера изменения во времени полей давления парогазовой смеси, концентрации пара, распределения влагосодержания, а также температуры отдельных фаз. Рис. 2 иллюстрирует некоторые возможности вычислительного комплекса.

#### Выводы

На основе методов механики гетерофазных систем разработаны теоретические основы расчета взаимосвязанного тепло-массопереноса в коллоидных

капиллярно-пористых анизотропных материалах (на примере древесины). Проведенные расчеты свидетельствуют о возможности применения сформулированной математической модели для выбора эффективных режимов сушки древесины. Модель не ограничена конкретным способом сушки и может быть использована для натуральной и уплотненной древесины любых пород. Заметим, что построенная модель тепломассопереноса в трехфазной системе в предельном случае переходит к модели диффузионно-фильтрационного влаготеплопереноса академика А.В. Лыкова. При реализации процедуры предельного перехода удалось получить аналитические выражения для представляющих трудность в определении коэффициентов диффузии влаги и критерия фазовых переходов. Эти соотношения могут быть использованы для технологических расчетов сушки пиломатериалов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринчик Н.Н. Процессы переноса в пористых средах, электролитах и мембранах. Минск: АНК «Институт тепло- и массообмена» АН Беларуси, 1991. 251 с.
2. Дорняк О.Р. Гидродинамическая задача для процессов модифицирования древесины // Изв. СПб ЛТА. 2005. В. 172. С. 143–150.
3. Лыков А.В. Теория сушки. М.: Энергия, 1968. 471 с.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Павлюкевич Н.В. Введение в теорию тепло- и массопереноса в пористых средах. Минск: Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАНБ, 2003. 140 с.
6. Сафин Р.Р., Хасанишин Р.Г., Сафин Р.Г. Математическая модель процесса конвективной сушки пиломатериалов в разряженной среде // Лесн. журн. 2006. № 4. С. 64–71. (Изв. высш. учеб. заведений).
7. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины. М.: Лесн. пром-сть, 1990. 336 с.

Поступила 18.05.11

***O.R. Dornyak***

Voronezh State Academy of Forestry Engineering

#### **Mathematical Modelling of Wood Drying Process**

The article presents a mathematical model of thermal processes in wood as in a three-phase system taking into account a wide range of physical and structural factors.

*Key words:* wood, drying, mathematical modelling, heterophase environment

---